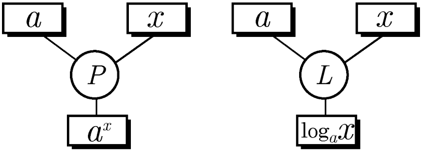
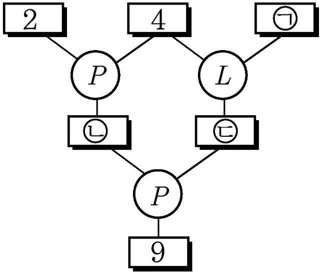
1. a^x과 $\log_a x$를 다음과 같이 나타내었다.



이때, 다음의 ㉠에 알맞은 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

㉡ $= 2^4$ ㉢ $= \log_4^{\text{㉠}}$

㉡$^{\text{㉢}} = 9$

$16^{\log_4^{\text{㉠}}} = 9$

㉠$^{\log_4^{16}} = 9$

㉠$^2 = 9$

㉠ $= 3$

2. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2-ax+1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3|>0$이고 $|a-3|\neq 1$

$\therefore a\neq 3,\ a\neq 2,\ a\neq 4 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2-ax+1>0$

① $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 성립

② $a>0$일 때, 방정식 $3ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12a<0,\ a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

①, ②에서 $0\leq a<12 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 $0,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$의 9개다.

3. 다음은 지수법칙 $a^{r+s} = a^r a^s$ 으로부터 모든 양수 x, y에 대하여 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$r = \log_a x$, $s = \log_a y$로 놓으면 $a^r = x$, $a^s = \boxed{㉠}$ 지수법칙으로부터 $a^{r+s} = \boxed{㉡}$ 로그의 정의에 의하여 $r + s = \log_a \boxed{㉡}$ 따라서, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$이다.

① x, $x+y$ ② y, $x+y$ ③ x, xy

④ y, xy ⑤ x, $\dfrac{y}{x}$

해설

$s = \log_a y$이므로 $y = a^s$ ∴ ㉠ y

$a^{r+s} = a^r a^s = xy$ ㉡ xy

4. 1이 아닌 세 자연수 x, y, z가 다음 두 식을 만족한다.

㉠ $\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{5}{3}$
㉡ $\log_y z \log_z x + \log_z x \log_x y + \log_x y \log_y z = \frac{5}{3}$

이때, $(\log_y z)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{20}{9}$ ② $-\frac{11}{9}$ ③ $-\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 1

해설

$\log_y z = A, \log_z x = B, \log_x y = C$라 하면

$\log_z y = \frac{1}{A}, \log_x z = \frac{1}{B}, \log_y x = \frac{1}{C}$ 이므로

$A + B + C = \frac{5}{3}$ 에서 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB + BC + CA}{ABC}$

이므로 $AB + BC + CA = \frac{5}{3}$

$\therefore\ (\log_z y)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$

$= A^2 + B^2 + C^2$

$= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{9}$

5. $\log_2 5$의 정수부분을 x, 소수부분을 y라 할 때, $\dfrac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}$의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$이므로

$x=2,\ y=\log_2 5-2=\log_2 \frac{5}{4}$

$$2^{-x}=2^{-2}=\frac{1}{4},\ 2^x=4$$

$$2^{-y}=2^{-\log_2 \frac{5}{4}}=2^{\log_2 \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}=2^{\log_2 \frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$$

$$2^y=2^{\log_2 \frac{5}{4}}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore\ \frac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}{4+\frac{5}{4}}=\frac{\frac{21}{20}}{\frac{21}{4}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

6. 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$의 두 근 $\alpha,\ \beta(0<\alpha<\beta)$에 대하여 $b=\beta-\alpha$라 할 때, $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}}+\log_b \beta^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$이다. 이때, 상수 $a,\ b$에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta(0<\alpha<\beta)$이므로

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=6$

$\log_b \alpha^{\frac{1}{3}}+\log_b \beta^{\frac{1}{3}}=\log_b(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{3}\log_b 6=\dfrac{2}{3}$에서

$\log_b 6=2$이므로 $b^2=6$

$b^2=(\beta-\alpha)^2$

$=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=a^2-24=6$

$\therefore\ a^2=30$

$\therefore\ a^2+b^2=36$

7. 세 수 $A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3}$, $B = \log_3 5 + \log_3 4$, $C = \log_4 2 + \log_3 3$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $B < C < A$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3} = 3^{2-1} = 3$

$B = \log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 20$

이때, $\log_3 9 < \log_3 20 < \log_3 27$ 이므로 $2 < \log_3 20 < 3$

$C = \log_4 2 + \log_3 3 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ C < B < A$

8. 다음 세 실수 A, B, C의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

$$A = \log_9 3 + \log_5 \sqrt{5}$$
$$B = 5^{2\log_{25} 2}$$
$$C = \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2\sqrt{2}$$

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$$A = \log_{3^2} 3 + \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_5 5$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$B = (5^2)^{\log_{25} 2}$$
$$= 25^{\log_{25} 2}$$
$$= 2^{\log_{25} 25}$$
$$= 2$$

$$C = \frac{\log_a 3}{\log_a 2} \times \frac{\log_a 5}{\log_a 3} \times \frac{\log_a 2\sqrt{2}}{\log_a 5}$$
$$= \frac{\log_a 2\sqrt{2}}{\log_a 2}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}\log_a 2}{\log_a 2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

$\therefore A < C < B$

9. 다음은 2.3^9 의 값을 구하는 과정이다.

$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = $ (㉠)
$\log 1.8 = 0.2553$ 이므로
$\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$
$= 3 + \log 1.8$
$= \log($㉡$)$
$\therefore 2.3^9 = $ (㉡)

위의 과정에서 (㉠), (㉡) 에 알맞은 수를 차례로 나열한 것은? (단, $\log 1.8 = 0.2553,\ \log 2.3 = 0.3617$)

① $3.2553, 1800$ ② $3.2553, 180$ ③ $4.2553, 2800$
④ $4.52553, 280$ ⑤ $5.2553, 18000$

해설

$\log 2.3 = 0.3617$ 이므로
$\log 2.3^9 = 9\log 2.3 = 9 \times 0.3617 = 3.2553$
$\log 1.8 = 0.2553$ 이므로
$\log 2.3^9 = 3 + 0.2553$
$= 3 + \log 1.8 = \log 10^3 + \log 1.8$
$= \log(10^3 + 1.8) = \log 1800$
따라서 $2.3^9 = 1800$

10. $\log x$와 $\log \dfrac{10}{x}$의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 순서대로 나열한 것은? (단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① 1, −1　　② −1, 1　　③ 0, 1　　④ 1, 1　　⑤ 1, 0

해설

$\log x = n + \alpha,\ (0 < \alpha < 1)$이라하면

$$\log \frac{10}{x} = 1 - \log x$$
$$= 1 - n - \alpha$$
$$= 1 - n - \alpha + 1 - 1$$
$$= -n + 1 - \alpha$$

$0 < \alpha < 1$이므로 $0 < 1 - \alpha$

$\therefore\ \log \dfrac{10}{x}$의 정수 부분 : $-n$, $\log \dfrac{10}{x}$의 소수 부분 : $1 - \alpha$

정수 부분의 합 : $n - n = 0$

소수 부분의 합 : $\alpha + 1 - \alpha = 1$

11. $1 < x < 10$인 실수 x에 대하여 $\log x^3$과 $\log \dfrac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같은 모든 x의 값의 곱을 구하면?

① 10 ② $10^{\frac{8}{5}}$ ③ 10^2 ④ $10^{\frac{5}{2}}$ ⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$에서 $0 < \log x < 1$이므로 $\log x = \alpha$로 놓으면

$\log x^3 = 3\log x = 3\alpha,$

$\log \dfrac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2\log x = -2\alpha$

이때, $\log x^3 - \log \dfrac{1}{x^2} = 5\alpha$이므로$5\alpha$는 정수이다.

한편, $0 < \alpha < 1$이므로 $0 < 5\alpha < 5$

$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$

즉, $\alpha = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$이므로

$\log x = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$

$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$

따라서 모든 x의 값들의 곱은

$10^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = 10^2$

12. $\log A$ 의 정수 부분, 소수 부분이 $3x^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$\log A = n + \alpha$(n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라 하면

$n + \alpha = \frac{5}{3}$, $n \cdot \alpha = \frac{a}{3}$

$n = 1$, $\alpha = \frac{2}{3}$

$\therefore\ a = 2$

13. 채소에 뿌리는 어떤 살충제는 시간이 지나면 인체에 해가 없는 물질로 분해되는데 처음에 뿌린 살충제의 양 M_0와 뿌린 후 x일이 지난 후 남아 있는 살충제의 양 $M(x)$사이에 $M(x) = M_0 \times 5^{-kx}$($k$는 상수)의 관계가 성립한다고 한다. 처음에 채소에 2kg의 살충제를 뿌렸더닌 10일이 지난 후 1kg 이때, k의 값은?

① $-\log_2 5$　② $-\log_5 2$　③ $\dfrac{1}{10}\log 2$

④ $\dfrac{1}{10}\log_5 2$　⑤ $\dfrac{1}{10}\log_2 5$

해설

$M(x) = M_0 \times 5^{-kx}$에서 2kg의 살충제를 뿌렸더니
10일이 지난 후 1kg의 살충제가 남았으므로

$$1 = 2 \cdot 5^{-10k},\ 5^{-10k} = \frac{1}{2}$$

$$-10k\log 5 = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

$$10k = \frac{\log 2}{\log 5} = \log_5 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{10}\log_5 2$$

14. 어느 반도체 업체의 2001 년 말의 매출액이 8 억원이었다. 13 년동안 매출이 지속적으로 상승하여 지난 2014 년 말에는 매출액이 160 억원이 되었다고 한다. 다음의 상용로그표를 이용하여 이 회사의 연평균 매출신장률을 구하면?(단, $\log 2 = 0.3$)

<상용로그표>

수	4	5	6	7	8
1.0	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334
1.1	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719
1.2	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072

① 약 16% ② 약 18% ③ 약 24%
④ 약 26% ⑤ 약 28%

해설

연평균 매출신장률을 r이라 하면

$8(1+r)^{13} = 160,\ (1+r)^{13} = 20$

양변에 상용로그를 취하면

$13\log(1+r) = \log 20 = 1 + \log 2$

$$\log(1+r) = \frac{1+\log 2}{13} = 0.1$$

$\log 1.25 = 0.0969$이고

$\log 1.26 = 0.1004$이므로

$x : 0.01 = 31 : 35$

$\therefore\ x \fallingdotseq 0.00886$

$1 + r \fallingdotseq 1.25 + 0.00886$

$\fallingdotseq 1.25886$

$\therefore\ r \fallingdotseq 0.25886$이므로 연평균 매출신장률은 약 26%이다.

15. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A시의 인구는 5년마다 7% 증가한다고 한다. 2015년의 A시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$로 계산한다.)

① 121만명　② 145만명　③ 162만명

④ 178만명　⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A의 인구는

$100 \times (1+0.07)^7 = 100 \times 1.07^7$(만 명)

$\log 1.07^7 = 7\log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$

이때 $\log 1.62 = 0.21$이므로

$1.07^7 = 1.62$

따라서 2050년의 A시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$(만 명)

16. $\log_3 375$ 의 소수 부분을 a라 할 때, $\left[5^a + \frac{1}{5^a}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\log_5 125 < \log_3 375 < \log_5 625$ 이므로

$3 < \log_5 375 < 4$

$\therefore\ a = \log_5 375 - 3 = \log_5 375 - \log_5 125$

$= \log_5 \frac{375}{125} = \log_5 3$

$\left[5^a + \frac{1}{5^a}\right] = \left[5^{\log_5 3} + \frac{1}{5^{\log_5 3}}\right] \left[3 + \frac{1}{3}\right] = 3$

17. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $n \le \log_a b < n+1$(n은 정수)이 성립할 때, $f(a,\ b) = n$으로 정의한다. 옳은 내용을 보기에서 고른 것은?

보기

㉠ $f(2,\ 9) = 4$ 이다.

㉡ $f(a,\ b) = 2$ 이면 $f(b,\ a) = 0$ 이다.

㉢ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $f(b,\ a) = -1$ 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $3 < \log_2 9 < 4$ 이므로 $f(2,\ 9) = 3$ (거짓)

㉡ $f(a, b) = 2$이면 $2 \le \log_a b < 3$

$\frac{1}{3} < \log_b a \le \frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = 0$ (참)

㉢ $f(a,\ b) = -2$ 이면 $-2 \le \log_a b < -1$

$-1 < \log_b a \le -\frac{1}{2} \quad \therefore f(b,\ a) = -1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

18. 1이 아닌 양수 a, b, c가 다음 두 조건을 만족한다.

㉠ $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 4$
㉡ $\log_b a + \log_c b + \log_a c = -3$

이 때, $(\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$\log_a b = \alpha,\ \ \log_b c = \beta,\ \ \log_c a = \gamma$라 하면

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \alpha + \beta + \gamma = 4\ \cdots$ ㉠

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -3\ \cdots ㉡$$

㉡에서 $\dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3$ 이고

$\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$이므로

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$

$\therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 22$

19. 세 양수 a, b, c에 대하여

$$a^x = (\sqrt{b})^y = (\sqrt[3]{c})^z = 125,\ abc = 5\sqrt[5]{5}$$

가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{24}{5}$

해설

$a^x = b^{\frac{y}{2}} = c^{\frac{z}{3}} = 5^3$ 이므로

$a^x = 5^3$ 에서 $x = \log_a 5^3 = 3\log_a 5$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\log_5 a$

$b^{\frac{y}{2}} = 5^3$ 에서 $\frac{y}{2} = \log_b 5^3 = 3\log_b 5$

$\therefore \frac{2}{y} = \frac{1}{3}\log_5 b$

$c^{\frac{z}{3}} = 5^3$ 에서 $\frac{z}{3} = \log_c 5^3 = 3\log_c 5$

$\therefore \frac{3}{z} = \frac{1}{3}\log_5 c$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{c}$

$= \frac{1}{3}\log_5 a + \frac{1}{3}\log_5 b + \frac{1}{3}\log_5 c$

$= \frac{1}{3}(\log_5 a + \log_5 b + \log_5 c)$

$= \frac{1}{3}\log_5 abc$

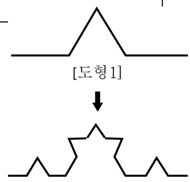
$= \frac{1}{3}\log_5 5^{\frac{6}{5}} (\because abc = 5\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{6}{5}})$

$= \frac{2}{5}$

20. 다음은 도형의 차원에 대한 설명이다.

> 선분을 2등분하면 2개의 선분으로 나누어지고 3등분하면 3개로 나누어진다. 이것을 각각 $2=2^1$, $3=3^1$로 나타낼 수 있으므로 선분의 차원은 1차원이다. 정사각형의 각 변을 2등분하면 정사각형 4개로 나누어지고 3등분하면 9개로 나누어진다. 이것을 각각 $4=2^2$, $9=3^2$로 나타낼 수 있으므로 정사각형의 차원은 2차원이다. 정육면체의 각 변을 2등분하면 정육면체 8개로 나누어지고 3등분하면 27개로 나누어진다. 이것을 각각 $8=2^3$, $27=3^3$로 나타낼 수 있으므로 정육면체의 차원은 3차원이다. 일반적으로 어떤 도형을 x등분하여 같은 모양 y개로 나눠질 때, $y=x^a$의 관계가 성립하면 a를 그 도형의 차원이라고 한다.

오른쪽 그림은 [도형1]을 이용하여 같은 모양으로 이루어진 [도형2]를 만든 것이다. 이때, [도형1]의 차원을 구하면?



① $\log 2$　② $\log 3$　③ $\dfrac{\log 3}{\log 2}$

④ $\dfrac{\log 2}{\log 3}$　⑤ $2\dfrac{\log 2}{\log 3}$

해설

[도형1]에서 도형의 각 변을 3등분하면 [도형2]와 같이 같은 도형 4개가 만들어진다.

즉, $x=3$ 일 때, $y=4$이므로 차원을 a라 하면

$4=3^a$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 4=\log 3^a,\ 2\log 2=a\log 3$

$\therefore a=\dfrac{2\log 2}{\log 3}$

21. 자연수 x, y에 대하여 $\log x$, $\log y$의 정수 부분을 각각 m, n이라 하자. $m^2+n^2=4$를 만족하는 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하면?

① 16200　② 16400　③ 16600
④ 17010　⑤ 24300

해설

x, y가 자연수이므로 $m \geq 0$, $n \geq 0$인 정수이고, $m^2+n^2=4$인 경우는 다음과 같다.

(i) $m=2$, $n=0$일 때
$2 \leq \log x < 3$이므로 $100 \leq x < 1000$
$0 \leq \log y < 1$이므로 $1 \leq y < 10$
따라서, 순서쌍 (x,y)의 개수는 $900 \times 9 = 8100$
(ii) $n=0$, $m=2$일 때
(i)의 경우와 순서만 바뀌므로 이때의 순서쌍 (x, y)의 개수도 8100이다.
(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (x, y)의 개수는
$8100+8100=16200$

22. 양수 x에 대하여 $I(x)$는 x의 상용로그의 정수 부분을 나타낸다. 좌표평면에서 $\left\{(x, y) | \{I(x)\}^2 + \{I(x)\}^2 = 1\right\}$이 나타내는 영역의 넓이는?

① 1628.2　② 1630.4　③ 1632.6　④ 1634.8　⑤ 1636.2

해설

$n = \log x < n + 1$(n은 정수)

$m = \log x < m + 1$(m은 정수)

$I(x) = n,\ I(y) = m$

$n^2 + m^2 = 1$

$(n,\ m) = (1,\ 0), (-1,\ 0), (0,\ 1), (0,\ -1)$

(i) $n = 1,\ m = 0$일 때

$1 \le \log x < 2$이므로 $10 \le x < 100$

$0 \le \log y < 1$이므로 $1 \le y < 10$

(ii) $n = -1,\ m = 0$일 때

$-1 \le \log x < 1$이므로 $\frac{1}{10} \le < x < 1$

$0 \le \log y < 1$이므로 $1 \le y < 10$

(iii) $n = 0,\ m = 1$일 때

$0 \le \log x < 1$이므로 $1 \le x < 10$

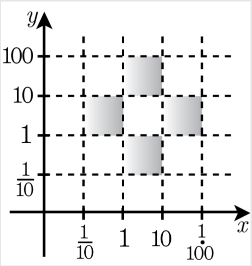
$0 \le \log y < 1$이므로 $10 \le y < 100$

(iv) $n = 0,\ m = -1$일 때

$0 \le \log x < 1$이므로 $1 \le x < 10$

$-1 \le \log y < 1$이므로 $\frac{1}{10} \le y < 1$

영역을 죄표평면에 나타내면



$\therefore (\frac{9}{10} \times 9 + 90 \times 9) \times 2 = 1636.2$

23. 다음 자연수는 $3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3$과 같이 3을 n번 곱하여 얻은 11자리의 수인데, 10^{10}번째와 10^9번째 자리의 수가 찢겨져 알 수가 없다. 자연수 n의 값을 구하면? (단, $\log 3 = 0.477$)

$$\square\square 3\,8\,1\,0\,5\,9\,6\,0\,9$$

① 19　　② 20　　③ 21　　④ 22　　⑤ 2

해설

$3^n = \square\square 381059609$은 11자리의 자연수이므로 $\log 3^n$의 지표는 10이다.

$\therefore 10 \le \log 3^n < 11$

$10 \le n \log 3 < 11$이므로 $\dfrac{10}{\log 3} \le n < \dfrac{11}{\log 3}$

이때, $\dfrac{10}{\log 3} = 20.9 \times \times\times$, $\dfrac{11}{\log 3} = 23.0 \times \times\times$이므로 n의 값은 21, 22, 23중 하나이다.

한편, 3^n의 일의 자리의 숫자가 같은 수끼리 써보면

$3^1,\ 3^5,\ 3^8, \cdots,\ 3^{4k+1} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 3이다.

$3^2,\ 3^6,\ 3^{10}, \cdots,\ 3^{4k+2} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 9이다.

$3^3,\ 3^7,\ 3^{11}, \cdots,\ 3^{4k+3} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 7이다.

$3^4,\ 3^8,\ 3^{12}, \cdots,\ 3^{4k} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 1이다.

그런데, $3^n = \square\square 381059609$의 일의 자리의 숫자가 9이므로 n은 $4k+2$의 꼴이다.

따라서, 구하는 n의 값은 $4 \times 5 + 2 = 22$

24. 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{b^2}{a}$은 정수 부분이 여섯 자리인 수이고, $\dfrac{a^2}{b}$은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\log \dfrac{b^2}{a}$의 소수 부분을 α라 할 때, $10^{\alpha+6} = \dfrac{b^2}{a}$이다.

ㄴ $\left[\log \dfrac{a^2}{b}\right] = -3$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

ㄷ a는 한 자리의 자연수이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $\dfrac{b^2}{a}$은 정수 부분이 여섯 자리이므로 $5 \le \log \dfrac{b^2}{a} < 6$이다.

따라서 $\alpha = \log \dfrac{b^2}{a} - 5,\ \log \dfrac{b^2}{a} = \alpha + 5$

$\therefore 10^{\alpha+5} = \dfrac{b^2}{a}$　(거짓)

ㄴ $\dfrac{a^2}{b}$은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로

$-3 \le \log \dfrac{a^2}{b} < -2$이다.

$\therefore \left[\log \dfrac{a^2}{b}\right] = -3$　(참)

ㄷ $5 \le \dfrac{b^2}{a} < 6$이므로 $5 \le 2\log b - \log a < 6 \quad \cdots$ ㄱ

$-3 \le \dfrac{a^2}{b} < -2$이므로 $-3 \le 2\log a - \log b < -2 \quad \cdots$ ㄴ

ㄱ $+$ ㄴ $\times 2$에서

$-1 \le 3\log a < 2 \quad \therefore -\dfrac{1}{3} \le \log a < \dfrac{2}{3}$

따라서, $\log a$의 정수 부분은 -1 또는 0이다.
그런데, a는 자연수이므로 a는 한 자리의 수이다.　(참)
따라서, 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

25. 3^{222}은 p자리의 정수이고, 최고 자리의 숫자는 q, 일의 자리의 숫자는 r이다. 이때, $p+q+r$의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 121 ② 123 ③ 125 ④ 127 ⑤ 129

해설

$\log^{222} = 222\log 3 = 222 \times 0.4771 = 105.9162$

$\log^{222}$ 의 지표가 105 이므로 3^{222} 는 106 자리의 정수이다.

$\therefore p = 106$

이때

$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$

$\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$

이므로 $\log 8 < 0.9162 < \log 9$

$105 + \log 8 < 105.9162 < 105 + \log 9$

$\log(8 \times 10^{105}) < 3^{222} < \log(9 \times 10^{105})$

따라서 3^{222} 의 최고 자리의 숫자는 8 이다.$(q = 8)$

$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243,\ \cdots$ 이므로

3^n 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복된다.

$222 = 4 \times 55 + 2$ 이므로 3^{222} 의 일의 자리의 숫자는

3^2 의 일의 자리의 숫자와 같은 9 이다. $(r = 9)$

따라서 $p + q + r = 106 + 8 + 9 = 123$

26. $\log x$의 정수 부분은 n이고 $\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1 일 때, x의 값을 구하면?

① $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$ ② $10^{n},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$ ③ $10^{n+1},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$

④ $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+1}$ ⑤ $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+\frac{4}{3}}$

해설

$\log x = n+\alpha,\ 0 \le \alpha < 1$

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\alpha$

(i) n이 짝수일 때

$\log\sqrt{x}=$ 정수 $+\frac{1}{2}\alpha$

$\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 1$

$\alpha = \frac{2}{3}$

$\therefore \log x = n + \frac{2}{3}$

$x = 10^{n+\frac{2}{3}}$

(ii) n이 홀수일 때

$\log\sqrt{x}=$ 정수$+\ 0.5 + \frac{1}{2}\alpha$

$0 \le \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\alpha - 0.5$가 아닌

$\frac{1}{2}\alpha + 0.5$가 소수 부분이 됨

$\alpha + \frac{1}{2}\alpha + 0.5 = 1$

$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{1}{3}$

$\log x = n + \frac{1}{3}$

$x = 10^{n+\frac{1}{3}}$

27. 이차방정식 $ax^2-(3a-1)x+a+1=0$의 두 근이 $[\log A]$, $\log A-[\log A]$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$\log A = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라하면

$[\log A] = n$

$\log A - [\log A] = n+\alpha-n = \alpha$

$$n+\alpha = \frac{3a-1}{a},\ n\alpha = \frac{a+1}{a}$$

$$n+\alpha = 3-\frac{1}{a} = 2+1-\frac{1}{a}$$

$a>1$이므로

$$0<\frac{1}{a}<1$$

$$-1<-\frac{1}{a}<0$$

$0<1-\frac{1}{a}<1$ 이므로

$$2=n,\ 1-\frac{1}{a}=\alpha$$

$$2\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a}$$

$$2-\frac{2}{a}=1+\frac{1}{a}$$

$$1=\frac{3}{a}\qquad \therefore\ a=3$$

28. a, b가 유리수라 하면 서로소인 두 정수 p, q에 대하여 $\log_6(2^a \cdot 3^b) = \dfrac{q}{p}$(단, $p = q$)로 쓸 수 있다.

> 로그의 정의에 의하여 $2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$
> 이때, $ap =$ (가)이고 $a \neq b$이므로 (나) 이것은 가정에 모순이다.
> 따라서, $\log_6(2^a \cdot 3^b)$은 무리수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① bp, $p = q$ ② bp, $p = 0$ ③ bp, $p = 0$

④ bp, $q = q$ ⑤ bp, $p = 0$

해설

$2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 에서 $(2^a \cdot 3^b)^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$

$\therefore\ 2^{ap} \cdot 3^{bp} = 2^q \cdot 3^q$ 에서 $ap = bp \cdots$(가)

$(a - b)p = 0$

$a \neq b$이므로 $p = 0 \cdots$(나)

29. 실수 a에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\log_{a^2+1}(a^2+a+1)$ ㄴ $\log_{2|a|+2}(a^2+2a+1)$

ㄷ $\log_{a^2+2}(a^2+2a+3)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ [반례] 밑의 조건에서 $a=0$일 때, 성립하지 않는다.

ㄴ [반례] $a=-1$일 때, 진수 $a^2+2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ 진수 $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$이고, 밑 $a^2+2\geq 2$이므로 로그가 항상 정의된다. 따라서, ㄷ만 옳다.

30. 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$ ㄴ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

ㄷ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 밑의 조건에서

$$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$$

진수의 조건에서 $a^2+1\geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ (반례) $a=0$일 때, 밑 $2|a|+1=1$ 이므로

로그를 정의할 수 없다.

ㄷ (반례) $a=1$일 때, 진수 $a^2-2a+1=0$이므로

로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ이다.

31. 다음은 로그의 성질 $\log q^r = r \log q$를 이용하여 m이 0이 아닌 실수일 때, $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$(단, a는 1이 아닌 양수, b는 양수)가 성립함을 증명한 것이다.

$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면 $b^n =$ (가) $= (a^x)^{(나)}$이므로 $a^x =$ (다) 따라서 $x = \log_a$(다) $= \dfrac{n}{m} \log_a b$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① (가) : a^x, (나) : m, (다) b^n

② (가) : a^x, (나) : $\dfrac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

③ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

④ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) b^n

⑤ (가) : $(a^m)^x$, (나) : $\dfrac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

해설

$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$b^n = (a^m)^x = (a^x)^m$

위의 식의 양변을 $\dfrac{1}{m}$ 제곱하면 $b^{\frac{n}{m}} = a^x$

따라서, $x = \log_a b^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m} \log_a b$가 성립한다.

32. 두 자연수 m, n 의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 할 때, 다음 두 식

$\log_3 L - \log_3 G = 2 + \log_3 2$,

$\log_2 L + \log_2 G = 5 + \log_2 3$

이 성립한다. $G < m < n < L$일 때, $m + n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$\log_3 L - \log_3 G = 2 + \log_3 2$에서

$\log_3 \dfrac{L}{G} = \log_3 18 \quad \therefore \dfrac{L}{G} = 18 \cdots ㉠$

$\log_2 L + \log_3 G = 5 + 2\log_2 3$에서

$\log_2 LG = \log_2 2^5 \cdot 3^2 \quad \therefore LG = 2^5 \cdot 3^2$

㉠$\times$㉡을 하면 $L^2 = 2^6 \cdot 3^4 \quad \therefore L = 2^3 \cdot 3^2$

이것을 ㉠에 대입하면 $G = 2^2 = 4$

$m = aG,\ n = bG(a, b$는 서로소$)$라 하면

$ab = \dfrac{L}{G} = 18 = 2 \times 3^2$이고 $G < m < n < L$에서

$a = 2,\ b = 3^2$이다.

$\therefore m + n = aG + bG = G(a + b) = 2^2(2 + 9) = 44$

33. 1보다 큰 양수 a, b, c에 대하여 $a^x = b^{2y} = c^{3z} = 64$, $\log_2 abc = 12$가 성립할 때, $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

a^{64}에서 $x = \log_a 64$

$\frac{1}{x} = \log_{64} a = \log_{2^6} a = \frac{1}{6}\log_2 a$

$b^{2y} = 64$에서 $2y = \log_b 64$

$\frac{1}{2y} = \log_{64} b = \log_{2^6} b = \frac{1}{6}\log_2 b$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\log_2 b$

$c^{3z} = 64$에서 $3z = \log_c 64$

$\frac{1}{3z} = \log_{64} c = \log_{2^6} c = \frac{1}{6}\log_2 c$

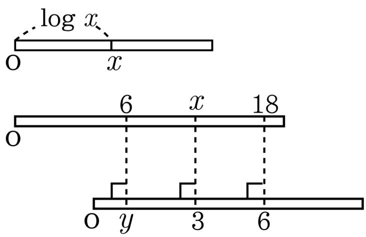
$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\log_2 c$

$\therefore \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 6 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} + 2 \cdot \frac{1}{z}$

$= 6 \cdot \frac{1}{6}\log_2 a + 3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 b + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 c$

$= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2 abc = 12$

34. 아래쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하여 거리가 $\log x(x>1)$가 되는 곳의 눈금을 x로 정한 자가 있다. 같은 종류의 두 개의 자의 눈금이 아래 그림과 같이 일치하였을 때, $x-2y$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

위의 그림과 같이 자 A에서 원점에서 거리가 6인 지점을 L, x인 지점을 M, 18인 지점을 N, 자 B에서 원점에서 거리가 y인 지점을 P, 3인 지점을 Q, 6인 지점을 R이라 하면

MN $=$ QR이므로 $\log 18=\log x=\log 6-\log 3$에서 $\log \dfrac{18}{x}=\log \dfrac{6}{3}$

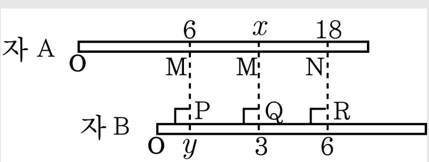
$\therefore\ x=9$

LN $=$ PR이므로

$\log 18-\log 6=\log 6-\log y$에서

$\log \dfrac{18}{6}=\log \dfrac{6}{y}\quad \therefore\ y=2$

$\therefore\ x-2y=9-4=5$



35. 세 자연수 x, y, z가 $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$를 만족할 때, x, y, z의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x<y<z$ ② $x<z<y$ ③ $y<x<z$

④ $z<x<y$ ⑤ $z<y<x$

해설

$x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$에서

$\log_{200}5^x+\log_{200}2^y=z$

$\log_{200}5^x\cdot 2^y=z$

$5^x\cdot 2^y=200^z=(2^3\cdot 5^2)^z=2^{3z}\cdot 5^{2z}$

따라서 $x=2z, y=3z$이므로

$x:y:z=2z:3z:z=2:3:1$

$\therefore z<x<y$

36. $A=10^{\log_{10}3}$, $B=\dfrac{1}{\log_{10}3}+\dfrac{1}{\log_3 10}$, $C=\dfrac{3}{\log_{10}3+\log_3 10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$

④ $C<A<B$ ⑤ $C<B<A$

해설

$A=10^{\log_{10}3}=3$

$$B=\frac{1}{\log_{10}3}+\frac{1}{\log_3 10}$$

$$=\frac{1}{\log_{10}3}+\log_{10}3>2\sqrt{\frac{1}{\log_{10}3}\cdot\log_{10}3}=2$$

$C=\dfrac{3}{\log_{10}3+\log_3 10}$에서

$\log_{10}3+\log_3 10>2\sqrt{\log_{10}3\cdot\log_3 10}=2$이므로

$$C=\frac{3}{\log_{10}3+\log_3 10}<\frac{3}{2}$$

$\therefore C<B<A$

37. 제곱하면 6의 자리의 수가 되는 양의 정수를 a, 세제곱하면 7자리의 수가 되는 양의 정수를 b라 할 때, $\frac{a}{b}$의 정수 부분의 자릿수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

a^2이 6자리의 수이므로 $\log a^2$의 지표는 5이다.

$5 \le \log a^2 < 6, 5 \le 2\log a < 6$

$\therefore \frac{5}{2} \le \log a < 3 \cdots$ ㉠

b^3이 7자리의 수이므로 $\log b^3$의 지표는 6이다.

$6 \le \log b^3 < 7, 6 \le 3\log b < 7$

$\therefore 2 \le \log b < \frac{7}{3} \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡을 하면

$\frac{5}{2} - \frac{7}{3} \le \log a - \log b < 3 - 2$

$\therefore \frac{1}{6} \le \log \frac{a}{b} < 1$

따라서 $\log \frac{a}{b}$의 지표는 0이므로 $\frac{a}{b}$의 정수 부분 자리 수는 1이다.

38. x, y가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ xy는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.

ㄴ $y=10x$이면 $\log_{10}x$와 $\log_{10}y$의 소수 부분은 같다.

ㄷ $\frac{1}{x}$은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\log_{10}x = 1+\alpha (0 \le \alpha < 1)$
$\log_{10}y = 2+\beta (0 \le \beta < 1)$
ㄱ $\log_{10}xy = \log_{10}x + \log_{10}y = 3+\alpha+\beta$이고 여기에서 $0 \le \alpha+\beta < 2$이므로 정수 부분은 3 또는 4이다.
$\therefore$ xy는 4자리 또는 5자리 자연수이다. (참)
ㄴ $\log_{10}y = \log_{10}10x = 1+\log_{10}x = 2+\alpha$ (참)
ㄷ (반례) $x=10$일때, $\frac{1}{10}=0.1$ (거짓)

39. $x > 0$ 일 때, $\log x$ 의 정수 부분을 $f(x)$ 라 하자. 다음 두 조건을 만족하는 자연수 n 의 개수는?

(가) $1 < n < 100$ (나) $f(2n) = 1 + f(n)$

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

해설

(i) $1 < n < 10$ 일 때,

$0 < \log n < 1$ 이므로 $f(n) = 0$

$\therefore\ f(2n) = 1 + f(n) = 1 + 0 = 1$

$1 \leq \log 2n < 2,\ \ \log 10 \leq \log 2n < \log 10^2$

$10 \leq 2n < 100,\ \ 5 \leq n < 10$

따라서 자연수 n 의 개수는 $9 - 4 = 5$(개) 이다.

(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때,

$1 \leq \log n < 2$ 이므로 $f(n) = 1$

$\therefore\ f(2n) = 1 + f(n) = 1 + 1 = 2$

$2 \leq \log 2n < 3,\ \ \log 10^2 \leq \log 2n < \log 10^3$

$100 \leq 2n < 1000,\ \ 50 \leq n < 500$

그런데 $10 \leq n < 100$ 이므로 $50 \leq n < 100$

따라서 자연수 n 의 개수는 $99 - 49 = 50$(개) 이다.

(i), (ii) 에서 조건을 만족하는 자연수의 n 의 개수는 55 개이다.

40. 다음 세 조건을 만족시키는 $\log a$, $\log b$, $\log c$를 세 변으로 하는 삼각형을 만들려고 한다. 이때, a, b, c의 값은?

㉠ a, b, c는 한 자리의 정수이다.
㉡ a, b, c의 합은 16이다.
㉢ $\log b$의 소수 부분은 $\log a$의 소수 부분의 2배이다.

① $a=3,\ b=9,\ c=4$ ② $a=2,\ b=8,\ c=6$

③ $a=3,\ b=8,\ c=5$ ④ $a=3,\ b=7,\ c=6$

⑤ $a=2,\ b=6,\ c=8$

해설

a, b, c는 한 자리 정수이므로 $\log^a$, $\log^b$, $\log^c$의 정수 부분은 모두 0이다.

$\log^a=\alpha(0<\alpha<1)$

$\log^b=\beta(0<\beta<1)$

$\log^c=\gamma(0<\gamma<1)$ 라 하면

㉢에 의해 $\beta=2\alpha$

$\therefore \log^b=2\log^a=\log^{a^2}$

$b=a^2$

(i) $a=1$ 일 때 $b=1,\ c=14$

c는 두자리 정수이므로 모순

(ii) $a=2$ 일 때 $b=4,\ c=10$

c는 두자리 정수이므로 모순

(iii) $a=3$ 일 때 $b=9,\ c=4$

(iv) $a=4$ 일 때 $b=16$ 이므로 모순

$\vdots$

$\therefore a=3,\ b=9,\ c=4$

41. 상용로그의 정수 부분이 m인 자연수 전체의 개수를 x, 역수의 상용로그의 정수 부분이 $\bar{n}$인 자연수 전체의 개수를 y라 할 때, $\log x - \log y$를 m, n으로 표시한 것은?

① $m-n$ ② $m-n+1$ ③ $m-n+2$

④ $m+n-1$ ⑤ $m+n$

해설

정수 부분이 m인 수를 X, 역수의 정수 부분이 $\bar{n}$인 수를 Y라 하면

(i) $m \le \log X < m+1$, $10^m \le X < 10^{m+1}$

$\therefore$ 자연수 X의 개수는 $10^{m+1} - 10^m = 10^m(10-1) = 9 \cdot 10^m$(개)

(ii) $-n \le \log \dfrac{1}{Y} < -n+1$, $-n \le -\log Y < -n+1$, $n-1 < \log Y \le n$

$10^{n-1} < Y \le 10^n$

$\therefore$ 자연수 Y의 개수는 $10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10-1) = 9 \cdot 10^{n-1}$(개)

(i), (ii)에 의해 $\log x - \log y = \log \dfrac{x}{y} = \log \dfrac{9 \cdot 10^m}{9 \cdot 10^{n-1}} = \log 10^{m-n+1} = m-n+1$

42. 상용로그의 정수 부분이 5 인 자연수 전체의 개수를 x, 역수의 상용로그의 정수 부분이 4 인 자연수 전체의 개수를 y라 할 때, $\log x - \log y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$5 \leq \log^{n} < 6$

$10^5 \leq n < 10^6$ 이므로

n의 개수 $x = 10^6 - 10^5 = 9 \times 10^5$

$-4 \leq \log \dfrac{1}{m} < -3$

$-4 \leq -\log m < -3$

$3 < \log m \leq 4$

$10^3 < m \leq 10^4$

m의 개수 $y = 10^4 - 10^3 = 9 \times 10^3$

$\log x - \log y = \log 9 \times 10^5 - \log 9 \times 10^3$

$= 5 - 3 = 2$

43. 2^{2014}이 n자리의 정수라고 할 때, $\frac{1}{2^{2014}}$은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나오는가?

① n ② $n+1$ ③ $n-1$ ④ 2014 ⑤ 2015

해설

$\log 2^{2014}$의 가수는 0이 아니므로

$\log 2^{2014} = n-1+\alpha (0<\alpha<1)$

$\log 2^{\frac{1}{2014}} = \log 2^{-2014} = -2014 \log 2$

$= -(n-1+\alpha)$

$= -n+1-\alpha (\because\ 0<1-\alpha<1)$

$\log 2^{\frac{1}{2014}}$의 지표는 $-n$, 가수는 $1-\alpha$이므로

소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

44. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
$\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250 이다.
$\log 2 = 0.3010, \ \log 3 = 0.4771, \ \log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로
$\log 3 < 0.5250 < \log 4$
$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3 이다.

45. 자연수 A의 최고 자리의 숫자는 4이다. $\log A$의 소수 부분을 α라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① $0 \le \alpha < 0.3010$
② $0.3010 \le \alpha < 0.4771$
③ $0.4771 \le \alpha < 0.6020$
④ $0.6020 \le \alpha < 0.6990$
⑤ $0.6990 \le \alpha < 0.7781$

해설

A의 최고 자리의 숫자가 4이므로

$4 \times 10^n \le A < 5 \times 10^n$ (n은 자연수)라 하면

$n + \log 4 \le \log A < n + \log 5$

$\log 4 = 2\log 2 = 0.6020$, $\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$이므로

$n + 0.6020 \le \log A < n + 0.6990$

$\therefore 0.6020 \le \alpha < 0.6990$

46. 3^{37}은 m자리의 자연수이고, 최고 자리의 숫자는 n이다. 이때, $m+n$의 값은?

① 19　② 80　③ 21　④ 22　⑤ 23

해설

$\log 3^{37} = 37\log 3 = 37\times 0.4771 = 17.6527$

$\log 3^{37}$의 지표가 17이므로 3^{37}은 18자리의 수이다.

$\therefore m = 18$

$\log 3^{37}$의 가수가 0.6527이고

$\log 4 = 2\log 2 = 0.6020$,

$\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$이므로

$\log 4 < 0.6527 < \log 5$

$17 + \log 4 < 17.6527 < 17 + \log 5$

$\log(4\times 10^{17}) < \log 3^{37} < \log(5\times 10^{17})$

따라서 $4\times 10^{17} < 3^{37} < 5\times 10^{17}$이므로

3^{37}의 최고 자리의 숫자는 4이다.

$\therefore\ n = 4$

$\therefore\ m + n = 18 + 4 = 22$

47. $\log x$ 의 소수 부분과 $\log x^2$ 의 소수 부분이 서로 같은 x 의 값은 몇 개 존재하는가?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\log x = n + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$2\log x = 2n + 2\alpha$

$0 \le 2\alpha < 2$

(i) $0 \le 2\alpha < 1$ 일 때

$\alpha = 2\alpha \quad \therefore \alpha = 0$

$\log x = n$

$x = 10^n$

$10 \le 10^n < 1000$

$n = 1$ or 2

$\therefore x$는 2개

(ii) $1 \le 2\alpha < 2$ 일 때

$\alpha = 2\alpha - 1$

$1 = \alpha$

그런데 $0 \le \alpha < 1$ 이므로 모순

$\therefore x$는 2개

48. $\dfrac{3^{10}}{2^{30}} = k \cdot 10^n$($n$은 정수, $1 \le k < 10$) 일 때, $n + [k]$의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 이고 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 3　　⑤ 5

해설

$$\log \frac{3^{10}}{2^{30}} = 10 \log 3 - 30 \log 2$$
$$= -4.259$$
$$= -5 + 0.741$$

$\log k \cdot 10^n = n + \log k$

$0 \le \log k < 1$ 이므로

$n = -5,\ \log k = 0.741$

$\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.6990,$

$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7781$ 이므로

$\log 5 < \log k < \log 6 \quad \therefore k = 5.\times\times\times$

$\therefore n + [k] = -5 + 5 = 0$

49. 실수 a에 대하여 $[a]$는 a보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 다음 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x의 값의 곱을 M이라 할 때, $\log_{10} M^4$의 값을 구하여라.

㉠ $[\log_{10} x] = 1$
㉡ $\log_{10} x - \log_{10} \dfrac{1}{x^3} = [\log_{10} x] - \left[\log_{10} \dfrac{1}{x^3}\right]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

조건 ㉠에서 $[\log_{10} x] = 1$이므로 $\log_{10} x$의 지표는 1이다.

$\therefore 1 \le \log_{10} x < 2$

조건 ㉡에서 $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \log_{10} \dfrac{1}{x^3} - \left[\log_{10} \dfrac{1}{x^3}\right]$이므로

$\log_{10} x$와 $\log_{10} \dfrac{1}{x^3}$의 가수가 같다

즉, $\log_{10} x + 3\log_{10} x$=(정수)

$\therefore 4\log_{10} x$=(정수)

㉠에서 $4 \le 4\log_{10} x < 8$

$4\log_{10} x = 1,\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{6}{4},\ \dfrac{7}{4}$

$\therefore x = 10,\ 10^{\frac{5}{4}},\ 10^{\frac{6}{4}},\ 10^{\frac{7}{4}}$

따라서, x의 값을 모두 곱하면

$M = 10^{1+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4}} = 10^{\frac{11}{2}}$

$\therefore \log_{10} M^4 = 22$

50. 다음 두 조건을 만족하는 서로 다른 세 자연수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$의 최댓값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

보기

(가) $[\log A]+[\log B]+[\log C]=0$
(나) $\log A$, $\log B$, $\log C$가 이순서대로 등차수열을 이룬다.

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

A, B, C가 자연수이면 $[\log A]+[\log B]+[\log C]=0$을 만족하는 A, B, C는 모두 한자리 자연수

$2\log B=\log A+\log C$에서 $B^2=AC$

등비수열을 이루는 한 자리 자연수들은 1, 2, 4와 1, 3, 9과 2, 4, 8이다.

그 중 합이 최대인 것은 2, 4, 8이므로 이들의 합은 14

51. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c는 1이 아닌 양수이다.)

보기

ㄱ $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

ㄴ $\log a$, $\log b$, $\log c$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

ㄷ $\log_a 2$, $\log_b 2$, $\log_c 2$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$

ㄱ (참)

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b^2}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)^2$$

따라서, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

ㄴ (참)

$\log a + \log c = \log ac = \log b^2 = 2\log b$

따라서, $\log a$, $\log b$, $\log c$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

ㄷ (거짓)

(반례) $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$

$\log_2 2 = 1$, $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

$b^2 = ac$이지만 $2\log_b 2 \neq \log_a 2 + \log_c 2$

52. 함수 $f(x) = x + \log_{10} x$에 대하여
$\sum_{n=1}^{99}[f(n)] - \sum_{n=2}^{100}[f(n)]$의 값은?

① -106 ② -107 ③ -108 ④ -109 ⑤ -110

해설

$f(x) = x + \log_{10} x$이므로
$\sum_{n=1}^{99}[f(n)] - \sum_{n=2}^{100}[f(n)] = [f(1)] + [f(2)] + \cdots + [f(99)] - \{[f(2)] + [f(3)] + \cdots [f(100)]\}$
$= [1 + \log_{10} 1] - [100 + \log_{10} 100] = -110 + 1 = -109$

53. 다음은 $\log_m n$이 무리수임을 이용하여 $\log_{m^2} m^3 n$도 무리수임을 증명한 것이다.

> $\log_m n = s$(s는 [(가)])로 놓고
> $\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.
> $\log_{m^2} m^3 n = \dfrac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \dfrac{1}{2}$[(나)]
> 이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
> $2t - 3 = s$
> 이것은 [(다)]가 되어 모순이다.
> 따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 유리수, $2s$, (유리수)=(무리수)

② 유리수, $1 + 2s$, (짝수)=(홀수)

③ 유리수, $2 + s$, (유리수)=(무리수)

④ 무리수, $2s$, (짝수)=(홀수)

⑤ 무리수, $3 + s$, (유리수)=(무리수)

해설

$\log_m n = s$(s는 [무리수])로 놓고
$\log_{m^2} m^3 n$이 유리수라고 하자.

$$\log_{m^2} m^3 n = \frac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \frac{1}{2}[(3 + s)]$$

이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$(t는 유리수)라 하면
$2t - 3 = s$
이것은 [(유리수)=(무리수)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$은 무리수이다.

54. 자연수 x, y가 $\log_3 x + \log_9 y^2 = \log_3(2x+y+2)$를 만족시킬 때, $2x+y$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$xy = 2x + y + 2$, $xy - 2x - y + 2 = 4$

$(x-1)(y-2) = 4$, x, y는 자연수이므로

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases}, \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases}, \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases}$$

$x=5$, $y=3$일 때, $2x+y$의 최댓값은 13이다.

55. 다음을 만족하는 두 자연수 m, n의 곱 mn의 값을 구하면?

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right) + \log\left(1+\frac{1}{m+1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{m+n}\right) = \log n$$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \log\frac{m+1}{m}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right) = \log\frac{m+2}{m+1}$$

$$\vdots$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right) = \log\frac{m+n+1}{m+n}$$

따라서, 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \log\left(\frac{m+1}{m}\times\frac{m+2}{m+1}\times\cdots\times\frac{m+n+1}{m+n}\right)\\ &= \log\frac{m+n+1}{m}\end{aligned}$$

즉, $\log\frac{m+n+1}{m} = \log n$에서

$$\frac{m+n+1}{m} = n$$

$mn-m-n=1, (m-1)(n-1)=2$

m, n이 자연수이므로 $m-1=2$, $n-1=1$ 또는 $m-1=1$, $n-1=2$

$\therefore\ m=3,\ n=2$ 또는 $m=2,\ n=3$

$\therefore\ mn=6$

56. 두 실수 x, y가 등식 $25^x = 3^y = 64$를 만족할 때, 다음 중 x, y, $\frac{y}{x}$의 대소관계를 옳게 나타낸 것은?

① $x < y < \frac{y}{x}$ ② $x < \frac{y}{x} < y$ ③ $\frac{x}{y} < x < y$

④ $y < \frac{y}{x} < x$ ⑤ $y < x < \frac{y}{x}$

해설

$25^x = 64$에서

$x = \log_{25} 64 = \log_{5^2} 2^6 = 3\log_5 2 = \frac{3}{\log_2 5}$이고,

$\frac{3}{\log_2 8} < \frac{3}{\log_2 5} < \frac{3}{\log_2 4}$이므로

$1 < x < \frac{3}{2}$ $\cdots$ ㉠

$3^y = 64$에서

$y = \log_3 64 = \log_3 2^6 = 6\log_3 2 = \frac{6}{\log_2 3}$이고

$\frac{6}{\log_2 4} < \frac{6}{\log_2 3} < \frac{6}{\log_2 2}$이므로

$3 < y < 6$ $\cdots$ ㉡

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{6}{\log_2 3}}{\frac{3}{\log_2 5}} = 2 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} > 2(\because \log_2 3 < \log_2 5) \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\frac{y}{x} - y = \frac{y(1-x)}{x} < 0$, $\frac{y}{x} - x = \frac{y-x}{x} > 0$

$\therefore\ x < \frac{y}{x} < y$

57. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(n)=g(n)$이기 위한 필요충분조건은 $n=1$이다.

ㄴ $10^{f(50)}\times 10^{g(50)}=50$

ㄷ $f(10n)g(10n)=f(n)g(n)+g(n)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ (참)

(i) $f(n)=g(n)$ 인 경우는 $f(n)=g(n)=0$ 인 경우이다.

$\log n=f(n)+g(n)$ 이므로 $\log n=0, n=1$이다.

(ii) $n=1$이면 $\log 1=0$ 이므로 $f(1)=g(1)=0$

(i), (ii)에서 필요충분조건이 성립한다.

ㄴ (참)

$\log 50=1+\log 5 \quad \therefore f(50)=1, g(50)=\log 5$

$10^{f(50)}\times 10^{g(50)}=10^1\times 10^{\log 5}=10\times 5=50$

ㄷ (참)

$\log 10n=1+\log n=1+f(n)+g(n)$

$\therefore f(10n)=1+f(n), g(10n)=g(n)$

$\therefore f(10n)g(10n)=\{1+f(n)\}\cdot g(n)=f(n)g(n)+g(n)$

58. 무게가 $3^{100}g$인 물체가 있다. 이 물체의 무게를 $1g$, $5g$, $5^2g, 5^3g, \cdots$ 등의 추를 사용하여 측정하려고 한다. 사용되는 추의 개수를 최소로 할 때, 가장 무거운 추는 몇 g이어야 하는가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① $5^{66}g$ ② $5^{67}g$ ③ $5^{68}g$ ④ $5^{69}g$ ⑤ $5^{70}g$

해설

$\log 3^{100} = 100 \times \log 3 = 47.71$

$\log 5^n = n \log 5 = n(1 - \log 2)$

$= n(1 - 0.3010) = n$

$5^n < 3^{100}$

$n(1 - \log 2) < 100 \log 3$

$0.699n < 47.71$

$$n < \frac{47.71}{0.699} \fallingdotseq 68.25$$

최대인 n의 값은 68

$\therefore 5^{68}g$

59. 1보다 큰 자연수 n에 대하여 n의 모든 양의 약수를 $n_1,\ n_2,\ n_3, \cdots, n_k$ 라 할 때,
$f(n)=\log_n n_1+\log_n n_2+\log_n n_3+\cdots+\log_n n_k$라고 정의 하자. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(12)=3$

ㄴ $f(2n)=2f(n)$

ㄷ 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$은 정수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$$f(n)=\log_n n_1+\log_n n_2+\log_n n_3+\cdots+\log_n n_k$$ 이때, n의 모

$$=\log_n(n_1\times n_2\times\ n_3\times\cdots\times\ n_k)$$

든 양의 약수를 $n_1,\ n_2,\ n_3, \cdots, n_k$라 하므로

$n=n_1\times n_k=n_2\times n_{k-1}=\cdots$

$n_1\times n_2\times n_3\times\cdots\times n_k=n^{\frac{k}{2}}$

$\therefore\ f(n)=\log_n(n_1\times n_2\times n_3\times\cdots\times n_k)=\dfrac{k}{2}$

$f(n)$은 n의 양의 약수의 개수를 2로 나눈 수이다.
이제 ㄱ ~ ㄷ의 참, 거짓을 따져 보자.
ㄱ $12=2^2\times3$의 양의 약수는 6개 이므로
$\therefore\ f(12)=3\ \ \therefore$ 참
ㄴ $6=2\times3$의 양의 약수는 4개이므로 $f(6)=2$
$\therefore\ f(12)\neq 2f(6)$
ㄷ n이 완전제곱수일 때 약수의 개수는 홀수 개이므로
$f(n)$은 정수가 아니다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

60. $\dfrac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 끝자리에 오는 0의 개수를 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 200　　⑤ 400

해설

$n!$ 의 끝자리에 오는 0의 개수는 $n!$ 의 약수에서 10의 거듭제곱의 최대 지수와 같다. 또한 $n!$ 로 나눌 때, 5의 거듭제곱의 최대 지수이다.

일반적으로 $n!$ 의 소인수분해에서 소인수 p 의 거듭제곱의 최대 지수는

$\left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\cdots$ 이다.

그러므로 $\dfrac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 약수에서

5의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\left[\frac{2002}{5}\right]+\left[\frac{2002}{5^2}\right]+\left[\frac{2002}{5^3}\right]+\left[\frac{2002}{5^4}\right]$$

$$-2\left(\left[\frac{1001}{5}\right]+\left[\frac{1001}{5^2}\right]+\left[\frac{1001}{5^3}\right]+\left[\frac{1001}{5^4}\right]\right)$$

$$=(400+80+16+3)-2(200+40+8+1)=1$$

61. 20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 a_{20} = 8$

(나) $\dfrac{\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}}{2} = \log_2 a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 18)$

20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{20}$을 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_2 P$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\dfrac{\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}}{2} = \log_2 a_{n+1}$ 이므로

$\log_2 a_n a_{n+2} = 2\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_{n+1}^2$

$\therefore\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$

따라서, $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_{20}$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 8$

$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$

$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$

$\therefore\ \log_2 P = \log_2 2^{30} = 30$