

1. 다음 식을 계산하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \left[\sqrt[3]{3}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{125}\right]$$

- ① 405
- ② 415
- ③ 425
- ④ 451
- ⑤ 462

해설

$$\begin{aligned} 1 \leq n < 8 \text{ 이면 } \left[\sqrt[3]{n}\right] &= 1 \\ 8 \leq n < 27 \text{ 이면 } \left[\sqrt[3]{n}\right] &= 2 \\ 27 \leq n < 64 \text{ 이면 } \left[\sqrt[3]{n}\right] &= 3 \\ 64 \leq n < 125 \text{ 이면 } \left[\sqrt[3]{n}\right] &= 4 \\ n = 125 \text{ 이면 } \left[\sqrt[3]{n}\right] &= 5 \\ \therefore \left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \left[\sqrt[3]{3}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{125}\right] \\ &= 1 \times 7 + 2 \times 19 + 3 \times 37 + 4 \times 61 + 5 = 405 \end{aligned}$$

2. 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, n 은 2이상의 자연수 이다.)

$$f(-5, 5) + f(0, 5) + f(0, 6) + f(5, 6) \text{의 값은?}$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

(i) $a < 0$ 일 때,
 n 이 짝수이면 $f(a, n) = 0$, n 이 홀수이면 $f(a, n) = 1$ 이므로
 $f(-5, 5) = 1$
(ii) $a = 0$ 일 때,
 $f(a, n) = 1$ 이므로 $f(0, 5) = f(0, 6) = 1$
(iii) $a > 0$ 일 때,
 n 이 짝수이면 $f(a, n) = 2$ 이므로 $f(5, 6) = 2$
 $f(-5, 5) + f(0, 5) + f(0, 6) + f(5, 6) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$

3. $\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서, $a = 2, b = 1 \quad \therefore a + b = 3$

4. 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

- ㉠ -8 의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8}$ 이다.
- ㉡ $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 일 때, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ 이다.
- ㉤ n 이 2 이상인 홀수일 때, 실수 a 에 대하여 $x^n = a$ 를 만족하는 실수 x 는 1개다.
- ㉥ $a < 0$ 일 때, $\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[3]{(-a)^3} = 0$ 이다.

- ① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉡, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉥

⑤ ㉢, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ (거짓) -8 의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8}$, $1 \pm \sqrt{3}i$ 이다.
- ㉡ (참)
- ㉢ (참)
- ㉤ (참)
- ㉥ (거짓) $(-a) + (-a) = -2a$

5. m, n 이 양의 정수이고 a 가 양수일 때, 다음 중 실수인 것은 모두 몇 개인가?

$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$$
$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$$
$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$$
$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$$

- ① 4개
- ② 3개
- ③ 2개
- ④ 1개
- ⑤ 없다.

해설

- (i) $(-a)^{2n} > 0$ 이므로 실수
- (ii) $(-2a)^{2n} > 0$ 이므로 실수
- (iii) $(-a)^{2n-1} < 0$, $(2m-1)$ 은 홀수이므로 실수
- (iv) $(-a)^{2n-1} < 0$, m 은 짝수이므로 실수가 아니다.
- ∴ 실수는 3개

6. 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되도록 하는 정수 a 의 합을 구하면?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되려면 $(a-3)x^2-4(a-3)x-10 < 0 \dots \textcircled{1}$

(i) $a = 3$ 일 때,
 $-10 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $a \neq 3$ 일 때,
모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하려면 $a-3 < 0$ 이고 $(a-3)x^2-4(a-3)x-10 = 0$ 의 판별식 D 에 대하여 $\frac{D}{4} = 4(a-3)^2 + 10(a-3) < 0$

$(a-3)(4a-12+10) < 0$
 $(a-3)(2a-1) < 0$

$\therefore \frac{1}{2} < a < 3$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{1}{2} < a \leq 3$ 이므로
만족하는 정수 a 의 값의 합은 $1+2+3=6$

7. $\sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8} \\ &= \frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

8. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ 일 때, $\frac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^3+a^5+a^7}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}+1$

② $\sqrt{2}-1$

③ $3+2\sqrt{2}$

④ $3-2\sqrt{2}$

⑤ $5+\sqrt{2}$

해설

$a^5 = \sqrt{2}-1$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^3+a^5+a^7} &= \frac{a^{-10}(a^3+a^5+a^7)}{a^3+a^5+a^7} \\ &= a^{-10} \\ &= (\sqrt{2}-1)^{-2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

9. $a > 0$ 이고, $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 6$ 일 때, a^{2x} 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{3}{5}$

③ 1

④ $\frac{7}{5}$

⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 6 \text{ 에서}$$

$$a^x + a^{-x} = 6(a^x - a^{-x}), \quad 5a^x = 7a^{-x}$$

양변에 a^x 를 곱하면

$$5a^{2x} = 7$$

$$\therefore a^{2x} = \frac{7}{5}$$

10. 자연수 n 에 대하여 $x = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}$ 일 때, $(x + \sqrt{1+x^2})^{2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$\begin{aligned} 1+x^2 &= 1 + \frac{5^{\frac{2}{n}} - 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4} \\ &= \frac{5^{\frac{2}{n}} + 2 - 5^{-\frac{2}{n}}}{4} = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right)^2 \\ \therefore (x + \sqrt{1+x^2})^{2n} \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right)^{2n} = \left(5^{\frac{1}{n}} \right)^{2n} = 5^2 = 25 \end{aligned}$$

11. $2^a + 2^{-a} = 3$, $2^b + 2^{-b} = 5$ 일 때, $(2^{a+b} + 2^{-(a+b)})(2^{a-b} + 2^{-(a-b)})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} & (2^{a+b} + 2^{-(a+b)})(2^{a-b} + 2^{-(a-b)}) \\ &= 2^{2a} + 2^{2b} + 2^{-2b} + 2^{-2a} \\ &= 2^{2a} + 2^{-2a} + 2^{2b} + 2^{-2b} \\ &= (2^a + 2^{-a})^2 - 2 + (2^b + 2^{-b}) - 2 \\ &= 3^2 - 2 + 5^2 - 2 = 30 \end{aligned}$$

12. $A = \left\{ x \mid x = \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{3^6 - 1} \right\}^{\frac{1}{2n}}, n \text{과 } x \text{는 양의 정수} \right\}$ 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{(3^2 - 1)(3^4 + 3^2 + 1)} \right\}^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(\frac{2^{11}}{3^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

양의 정수 n 에 대하여 x 가 자연수가 되기 위한 n 은 1, 2, 4이다.
따라서, $A = \{2, 4, 16\}$
그러므로 집합 A 의 원소의 합은 22이다.

13. 서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대하여 $p = \frac{1}{a-b}, q = \frac{1}{b-c}, r = \frac{1}{c-a}$ 이라 하자. 이때, $(x^p)^q \cdot (x^q)^r \cdot (x^r)^p$ 의 값을 구하여라. (단, $x > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & (x^p)^q \cdot (x^q)^r \cdot (x^r)^p = x^{pq+pr+rp} \\ & pq + qr + rp \\ &= \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{(a-b) + (b-c) + (c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \\ &\therefore (x^p)^q \cdot (x^q)^r \cdot (x^r)^p = x^{pq+qr+rp} = x^0 = 1 \end{aligned}$$

14. 함수 $f(x) = 2^{-x}$ 에 대하여 $f(2a)f(b) = 4$, $f(a-b) = 2$ 일 때, $2^{3a} + 2^{3b}$ 의 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라 (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$f(2a)f(b) = 4$, $f(a-b) = 2$ 에서
 $2^{-2a} \cdot 2^{-b} = 2^2$, $2^{-(a-b)} = 2^1$ 이므로
 $\therefore 2a + b = -2$, $a - b = -1$
 $\therefore 3a = -3 \therefore a = -1$, $b = 0$
 $\therefore 2^{3a} + 2^{3b} = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$

15. 세 양수 a, b, c 에 대하여 $a^6 = 3, b^5 = 7, c^2 = 11$ 일 때, $(abc)^n$ 이 자연수가 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$a = 3^{\frac{1}{6}}, b = 7^{\frac{1}{5}}, c = 11^{\frac{1}{2}}$$

$$(abc)^n = \left(3^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

$3^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{2}}$ 이 자연수이려면, $\frac{n}{6}, \frac{n}{5}, \frac{n}{2}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

따라서, 최소의 자연수 n 은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 $n = 30$ 이다.

16. $\sqrt{a-1}\sqrt{-a} = -\sqrt{a-a^2}$ 이고, n 이 자연수일 때, $b = \sqrt[n]{a^{n+1}}, c = \sqrt[n+1]{a^{n+2}}$ 이라 한다. 다음의 서로 다른 세 실수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
 ④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

해설

$\sqrt{a-1}\sqrt{-a} = -\sqrt{a-a^2}$ 이므로

$a-1 \leq 0, -a \leq 0$

a, b, c 가 서로 다른 실수이므로 $a = 0, a = 1$ 일 때는 성립하지 않는다.

$\therefore 0 < a < 1$

$b = \sqrt[n]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}}$

$c = \sqrt[n+1]{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+1}} = a^{1+\frac{1}{n+1}}$

지수를 비교해 보면 $1 < 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$

$\therefore b < c < a$

17. a, b, c 가 서로 다른 실수일 때, 다음을 간단히 하면?

$$\left(3^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}}\left(3^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}}\left(3^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$$

- ① 3
- ② 9
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{9}$
- ⑤ $\frac{1}{27}$

해설

지수를 따로 써보면

$$\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(a-c)}$$
$$\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{a^2(b-c) - (b^2 - c^2)a + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$= -1$$
$$\therefore 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

18. $f_n(x) = x^n$, $a \neq 1$ 일 때, 다음 식들 중 $f_{2002}(a)$ 와 같은 값을 갖는 것을 모두 구하면?

㉠ $(f_{11}(a)f_{13}(a))^{14}$	㉡ $f_{11}(a)f_{13}(a)f_{14}(a)$
㉢ $(f_{11}(f_{13}(a)))^{14}$	㉣ $f_{11}(f_{13}(f_{14}(a)))$

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉢, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣
- ⑤ 모두 옳다.

해설

㉠ $(f_{11}(a)f_{13}(a))^{14} = (a^{24})^{14} = a^{336}$

㉡ $f_{11}(a)f_{13}(a)f_{14}(a) = a^{38}$

㉢ $(f_{11}(f_{13}(a)))^{14} = (a^{13 \cdot 14})^{14} = a^{2002}$

㉣ $f_{11}(f_{13}(f_{14}(a))) = (a^{14 \cdot 13})^{11} = a^{2002}$

따라서 옳은 것은 ㉢, ㉣이다.

19. $a > 1$ 이고 $\sqrt{x} = 2^a - 2^{-a}$ 일 때,
 $\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{x^2+4x} = 2^3$ 을 만족하는 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{x^2+4x} \\ &= \sqrt{x+(x+4)} + 2\sqrt{x(x+4)} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{x+4} \\ & \sqrt{x} = 2^a - 2^{-a} \text{의 양변을 제곱하면} \\ & x = 2^{2a} + 2^{-2a} - 2 \text{이므로} \\ & \sqrt{x} + \sqrt{x+4} = (2^a - 2^{-a}) + \sqrt{(2^{2a} + 2^{-2a} - 2) + 4} \\ &= (2^a - 2^{-a}) + \sqrt{2^{2a} + 2^{-2a} + 2} \\ &= (2^a - 2^{-a}) + (2^a + 2^{-a}) \\ &= 2 \cdot 2^a = 2^{a+1} = 2^3 \\ & \text{따라서 } a = 2 \end{aligned}$$

20. 자연수 n 에 대하여 $x = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} - 7^{-\frac{1}{n}})$ 일 때, $(x + \sqrt{1+x^2})^n$ 의 값은?

- ① 3
- ② 5
- ③ 7
- ④ 9
- ⑤ 11

해설

$$x = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} - 7^{-\frac{1}{n}}) \text{에서}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}(7^{\frac{2}{n}} - 2 + 7^{-\frac{2}{n}}) = \frac{1}{4}(7^{\frac{2}{n}} + 7^{-\frac{2}{n}} - 2) \text{이므로}$$
$$1 + x^2 = \frac{1}{4}(7^{\frac{2}{n}} + 7^{-\frac{2}{n}} + 2) = \frac{1}{4}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{-\frac{1}{n}})^2$$
$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(7^{\frac{2}{n}} + 7^{-\frac{2}{n}} + 2)} = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{-\frac{1}{n}})$$
$$\therefore x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} - 7^{-\frac{1}{n}}) + \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{-\frac{1}{n}}) = 7^{\frac{1}{n}}$$
$$\therefore (x + \sqrt{1+x^2})^n = \left(7^{\frac{1}{n}}\right)^n = 7$$

21. $x = \frac{1}{2}(2014^{\frac{1}{n}} - 2014^{-\frac{1}{n}})$ (n 은 자연수) 일 때, $(x - \sqrt{1+x^2})^n$ 을 간단히 하면?

- ① 2014^{-1}
 ② $(-1)^n \cdot 2014$
 ③ 2014
- ④ 2014^n
 ⑤ $(-1)^n \cdot 2014^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} \left(2014^{\frac{1}{n}} - 2014^{-\frac{1}{n}} \right) \\
 x^2 &= \frac{1}{4} \left(2014^{\frac{2}{n}} + 2014^{-\frac{2}{n}} - 2 \right) \\
 x^2 + 1 &= \frac{1}{4} \left(2014^{\frac{2}{n}} + 2014^{-\frac{2}{n}} + 2 \right) \\
 \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \left(2014^{\frac{1}{n}} + 2014^{-\frac{1}{n}} \right) \\
 \therefore x - \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \left(-2014^{-\frac{1}{n}} \right) \\
 \therefore (x - \sqrt{x^2 + 1})^n &= (-2014^{-\frac{1}{n}})^n = (-1)^n \cdot 2014^{-1}
 \end{aligned}$$

22. $x = a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}} (a > 0)$ 일 때, $(x + \sqrt{x^2 + 4})^n$ 의 값은?

- ① a ② $2a$ ③ 2^{n-1} ④ 2^na ⑤ $2^{n+1}a$

해설

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 4} &= a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}} + \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + a^{-\frac{2}{n}} - 2 + 4} \\ &= a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}} + \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + 2 \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{-\frac{1}{n}} + a^{-\frac{2}{n}}} \\ &= a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}} + \sqrt{(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}})^2} \\ &= a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} = 2 \cdot a^{\frac{1}{n}} \\ (\text{주어진 식}) &= (2 \cdot a^{\frac{1}{n}})^n = 2^na \end{aligned}$$

23. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ 에 대하여 $f(2\alpha) = 10$, $f(2\beta) = 8$ 일 때,
 $f(\alpha + \beta)f(\alpha - \beta)$ 의 값은?

- ① 5 ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{12}{2}$ ④ 9 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(2\alpha) &= \frac{1}{2}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}) = 10 \\ \therefore 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} &= 20 \\ f(2\beta) &= \frac{1}{2}(3^{2\beta} + 3^{-2\beta}) = 8 \\ \therefore 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} &= 16 \\ f(\alpha + \beta)f(\alpha - \beta) &= \frac{1}{2}(3^{\alpha+\beta} + 3^{-\alpha-\beta}) \cdot \frac{1}{2}(3^{\alpha-\beta} + 3^{-\alpha+\beta}) \\ &= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} + 3^{-2\alpha}) \\ &= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta}) \\ &= \frac{1}{4}(20 + 16) = 9 \end{aligned}$$

24. $0 < a < 1$ 이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 일 때, $\frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{15}$

② $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$$

$$\therefore a + a^{-1} = 8$$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} < 0$$

$$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$$

$$\therefore \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\frac{2\sqrt{15}}{8} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

25. 다음은 $n \geq 2$ 인 임의의 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n]{3}$ 이 무리수임을 증명한 것이다.

$\sqrt[n]{3}$ 을 (가)) 라고 가정하면
 $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 (나)) 로 놓을 수 있다.
 $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ 의 양변을 n 제곱하여 정리하면
 $3p^n = q^n \cdots \textcircled{㉠}$
그런데 $\textcircled{㉠}$ 에서 q^n 이 (다)) 이므로
 $q = 3k$ (단, k 는 자연수) $\cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$
이므로 p 도 (다))이다.
따라서, p, q 가 (나))라는 가정에 모순이므로
 $\sqrt[n]{3}$ 은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나) , (다)에 알맞는 것을 차례대로 적으면?

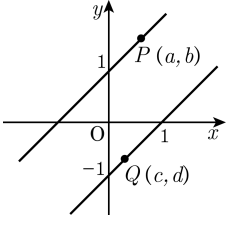
- ① 유리수, 서로 다른 자연수, 3의 배수
- ② 유리수, 서로소인 자연수, 3의 배수
- ③ 유리수, 서로 다른 자연수, 3의 배수
- ④ 무리수, 서로 다른 자연수, 3의 배수
- ⑤ 무리수, 서로소인 자연수, 홀수

해설

$\sqrt[n]{3}$ 을 (유리수)라고 가정하면
 $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 (서로소인 자연수))로 놓을 수 있다.
 $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ 의 양변을 n 제곱하여 정리하면
 $3p^n = q^n \cdots \textcircled{㉠}$
그런데, $\textcircled{㉠}$ 에서 q^n 이 (3의 배수)이므로
 $q = 3k$ (단, k 는 자연수) $\cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$ 이므로 p 도 (3의 배수)이다.
따라서 p, q 가 (서로소인 자연수)라는 가정에 모순이므로 $\sqrt[n]{3}$ 은 무리수이다.

26. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 가 각각 두 직선 m, n 위를 움직인다.

$2^b = 12 \cdot 2^d$ 이 성립할 때, $\frac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d}$ 의 값은 ?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두 직선 m, n 의 방정식은 각각 $y = x + 1$, $y = x - 1$ 이므로

$$b = a + 1, d = c - 1$$

$$\text{또, } 2^b = 12 \cdot 2^d \text{에서 } 2^{b-d} = 2^{a-c+2} = 4 \cdot 2^{a-c} = 12$$

$$\therefore 2^{a-c} = 3$$

$$\text{따라서, } 2^a + 2^b = 2^a + 2^{a+1} = 3 \cdot 2^a$$

$$2^c + 2^d = 2^c + 2^{c-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^c \text{이므로}$$

$$\frac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d} = \frac{3 \cdot 2^a}{\frac{3}{2} \cdot 2^c} = 2 \cdot 2^{a-c} = 2 \cdot 3 = 6$$

27. 다음은 한 변의 길이가 n 인 정사각형을 세 부분으로 나눈 각각의 넓이가 2^4 , 2^7 , 2^m 일 때, $m+n$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, m , n 은 자연수)

세 부분의 넓이의 합은 n^2 이므로 $2^4 + 2^7 + 2^m = n^2$
한편, $2^4 + 2^7 = 2^4(1 + 2^3) = 12^2$ 이므로
 $2^m = n^2 - 12^2 = (n - 12)(n + 12)$
이때, $n - 12 = 2^k$ (k 는 정수)⋯ⓐ
으로 놓으면
 $n + 12 = 2^{m-k}$ ⋯ⓑ
ⓑ-ⓐ을 하면 $24 = 2^k(2^{m-2k} - 1)$
∴ $2^k = [(가)]$, $2^{m-2k} - 1 = [(나)]$
따라서, $m + n = [(다)]$ 이다.

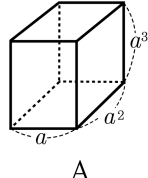
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) : 2, (나) : 12, (다) : 20
- ② (가) : 4, (나) : 6, (다) : 28
- ③ (가) : 4, (나) : 6, (다) : 32
- ④ (가) : 8, (나) : 3, (다) : 28
- ⑤ (가) : 8, (나) : 3, (다) : 32

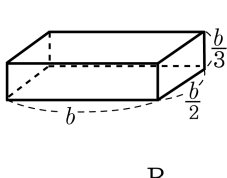
해설

세 부분의 넓이의 합은 n^2 이므로
 $2^4 + 2^7 + 2^m = n^2$
한편, $2^4 + 2^7 = 2^4(1 + 2^3) = 2^4 \cdot 3^2 = 12^2$ 이므로
 $2^m = n^2 - 12^2 = (n - 12)(n + 12)$
이때, $n - 12 = 2^k$ (k 는 정수)⋯ ㉠
 $2^m = 2^k(n + 12)$ 에서
 $n + 12 = 2^{m-k}$ ⋯ ㉡
㉡-㉠을 하면
 $24 = 2^{m-k} - 2^k = 2^k(2^{m-2k} - 1)$
즉, $2^k(2^{m-2k} - 1) = 2^3 \cdot 3$ 이고, 2^k 은 짝수, $2^{m-2k} - 1$ 은 홀수이므로
 $2^k = \boxed{8(가)}$, $2^{m-2k} - 1 = \boxed{3(나)}$
∴ $k = 3$, $m = 8$
㉠에서 $n = 12 + 2^3 = 20$ 이므로 $m + n = \boxed{28(다)}$ 이다.

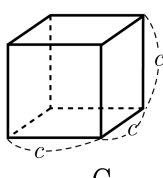
28. 다음 그림과 같은 직육면체 A, B, C 각각의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 순서쌍으로 나탄내면 $(a, a^2, a^3), \left(b, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}\right), (c, c, c)$ 이다. 직육면체 A, B, C 의 부피를 각각 4, 9, 16이라고 할 때, 가로의 길이 a , 세로의 길이 b , 높이 c 인 직육면체의 부피를 구하여라.



A



B



C

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$a \cdot a^2 \cdot a^3 = 4 \text{ 에서 } a^6 = 4, a^3 = 2 \therefore a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{3} = 9 \text{ 에서 } \frac{b^3}{6} = 9, b^3 = 54$$

$$\therefore b = \sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$c \cdot c \cdot c = 16 \text{ 에서 } c^3 = 16$$

$$\therefore c = \sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

따라서, 가로의 길이 a , 세로의 길이 b , 높이 c 인 직육면체의 부피는 $abc = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = 12$

29. $x > 0$, $x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

30. $a + b + c = -1$, $2^a + 2^b + 2^c = \frac{13}{4}$, $2^{-a} + 2^{-b} + 2^{-c} = \frac{11}{2}$ 을 만족하는
세 실수 a, b, c 에 대하여 $4^a + 4^b + 4^c$ 의 값은?

- ① $\frac{169}{19}$
- ② $\frac{143}{16}$
- ③ $\frac{121}{16}$
- ④ $\frac{81}{16}$
- ⑤ $\frac{49}{16}$

해설

$$\begin{aligned} 4^a + 4^b + 4^c &= (2^a)^2 + (2^b)^2 + (2^c)^2 \\ &= (2^a + 2^b + 2^c)^2 - 2(2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^a) \\ &= (2^a + 2^b + 2^c)^2 - 2(2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a}) \\ &= (2^a + 2^b + 2^c)^2 - 2(2^{-1-c} + 2^{-1-a} + 2^{-1-b}) (\because a + b + c = -1) \\ &= (2^a + 2^b + 2^c)^2 - 2(2^{-1} \cdot 2^{-c} + 2^{-1} \cdot 2^{-a} + 2^{-1} \cdot 2^{-b}) \\ &= (2^a + 2^b + 2^c)^2 - 2 \cdot 2^{-1}(2^{-c} + 2^{-a} + 2^{-b}) \\ &= \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 1 \cdot \frac{11}{2} = \frac{81}{16} \end{aligned}$$

31. $3^x + 3^y = 5$, $x + y = 1$ 일 때, $(3^x + 1)(3^{2x} - 3^x + 1) + (3^y - 1)(3^{2y} + 3^y + 1)$ 의 값은?

① 60

② 70

③ 80

④ 90

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} & (3^x + 1)(3^{2x} - 3^x + 1) + (3^y - 1)(3^{2y} + 3^y + 1) \\ &= (3^{3x} + 1) + (3^{3y} - 1) \\ &= 3^{3x} + 3^{3y} \\ &= (3^x + 3^y)^3 - 3 \cdot 3^x \cdot 3^y \cdot (3^x + 3^y) \\ &= (3^x + 3^y)^3 - 3^{x+y+1}(3^x + 3^y) \\ &= 5^3 - 3^2 \cdot 5 = 80 \end{aligned}$$

32. 세 자연수 a, b, c 와 실수 p, q, r, s 에 대하여 $a^p + b^q + c^r = 105^8$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{8}$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, $a > b > c$)
- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

$$a^p + b^q + c^r = 105^8 = k \text{ 라 하면}$$
$$a = k^{\frac{1}{p}} \cdots (\ominus)$$
$$b = k^{\frac{1}{q}} \cdots (\oslash)$$
$$c = k^{\frac{1}{r}} \cdots (\oplus)$$
$$105 = k^{\frac{1}{8}}$$
$$(\ominus) \times (\oslash) \times (\oplus) \text{ 을 하면}$$
$$abc = k^{\frac{1}{p}} \times k^{\frac{1}{q}} \times k^{\frac{1}{r}} = k^{(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})} = k^{\frac{1}{8}} = 105$$

따라서 $abc = 105 = 3 \times 5 \times 7$ 이고

$$a > b > c \text{ 이므로 } a = 7, b = 5, c = 3$$
$$\therefore a + b + c = 15$$

33. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$ 일 때, $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ 의 값을 구하면?

① 15

② 18

③ 21

④ 24

⑤ 27

해설

$$x\sqrt{x} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{x})^3 \text{ 이므로}$$

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

곱셈공식에 의하여

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 &= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 - 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

34. $60^a = 3$, $60^b = 5$ 일 때, $12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}}$ 는?

- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{12}$

해설

$60^a = 3$, $60^b = 5$ 에서 두 식을 곱하면 $60^{a+b} = 15$

$$\frac{60}{60^{a+b}} = \frac{60}{15} \text{ 이므로 } 60^{1-a-b} = 4 \dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$60^b = 5 \text{ 에서 } \frac{60}{60^b} = \frac{60}{5} \text{ 이므로 } 60^{1-b} = 12 \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } 12 = 60^{1-b}, \quad 12^{\frac{1}{1-b}} = 60, \quad (12^{\frac{1}{1-b}})^{1-a-b} = 60^{1-a-b}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} \text{ 에 의해 } 12^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 4, \quad (12^{\frac{1-a-b}{1-b}})^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}} = 2$$

35. $2^x = 3^y = 5^z$ 이 성립할 때, $5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 20

해설

$$2^x = 3^y = 5^z \text{에서}$$

$$2 = 5^{\frac{z}{x}}, 3 = 2^{\frac{x}{y}}, 5 = 3^{\frac{y}{z}}$$

$$\therefore 5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}} = 2 + 3 + 5 = 10$$

36. 0이 아닌 두 수 a, b 가 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ 이고, $2^a = 5^b$ 을 만족할 때,

$2^a = 5^b = \square$ 이다. $\square$ 안에 알맞은 수는?

- ① $\frac{1}{100}$
- ② $\frac{1}{\sqrt{10}}$
- ③ $\sqrt{10}$
- ④ 10
- ⑤ 100

해설

$2^a = 5^b = k$ 로 놓으면

$2^a = k$ 에서 $2 = k^{\frac{1}{a}} \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$5^b = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{b}} \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

①, ②을 변끼리 곱하면

$10 = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ 이므로

$10 = k^{\frac{1}{2}} \therefore k = 10^2 = 100$

37. $x^2 - 6x - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ② $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ ③ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ 5

해설

α, β 가 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 의 근이므로

$$a^2 - 6\alpha - 3 = 0, \beta^2 - 6\beta - 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 3 = 6\alpha, \beta^2 - 3 = 6\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^{\frac{1}{\alpha^2-3}} \times 2^{\frac{1}{\beta^2-3}} &= 2^{\frac{1}{6\alpha}} \times 2^{\frac{1}{6\beta}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})} \\ &= 2^{\frac{1}{6} \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = -3 \text{ 이므로}$$

$$2^{\frac{1}{6} \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

38. 집합 $A = \left\{ (x, y) \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x, y \text{ 는 실수} \right\}$ 에 대하여 $(a, b) \in A$ 일 때, 보기에서 집합 A 의 원소를 모두 고른 것은?

보기

$\textcircled{\tiny 1} \quad (2a, \ b^2)$

$\textcircled{\tiny 2} \quad \left(a-2, \ \frac{b}{4}\right)$

$\textcircled{\tiny 3} \quad \left(\frac{a}{3}, \ \sqrt[3]{b}\right)$

- $\textcircled{\tiny 1} \quad \textcircled{\tiny 1}$

$\textcircled{\tiny 2} \quad \textcircled{\tiny 2}$

$\textcircled{\tiny 3} \quad \textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 2}$
- $\textcircled{\tiny 4} \quad \textcircled{\tiny 2}, \textcircled{\tiny 3}$

$\textcircled{\tiny 5} \quad \textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 2}, \textcircled{\tiny 3}$

해설

$\textcircled{\tiny 1}$. $(a, b) \in A$ 에서 $b = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 이므로
 $b^2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^a \right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2a}$
 $\therefore (2a, \ b^2) \in A$
 $\textcircled{\tiny 2}$. $b = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 에서
 $\frac{b}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^{a+2} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}$
 $\therefore \left(a-2, \ \frac{b}{4}\right) \notin A$
 $\textcircled{\tiny 3}$. $(a, b) \in A$ 에서 $b = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 이므로
 $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^a} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^a \right\}^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{3}} \quad \therefore \left(\frac{a}{3}, \ \sqrt[3]{b}\right) \in A$
따라서 집합 A 의 원소인 것은 $\textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 3}$ 이다.

39. 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a, n)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, n 은 2이상의 자연수 이다.)

다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단 k 는 자연수)

보기

- ㉠ $f(f(3, 4), 5) = f(5, f(3, 4))$
- ㉡ $f(a, 2k + 1) + f(a^2, 2k) = 3$
- ㉢ $a < 0$ 이면 $f(a, 2n) < f(a, 2n + 1)$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

- ㉠ (거짓)
 $f(3, 4) = 2$ 이므로
 $f(f(3, 4), 5) = f(2, 5) = 1$
 $f(5, f(3, 4)) = f(5, 2) = 2$
- ㉡ (거짓)
(반례) $a = 0$ 일 때, $f(a, 2k + 1) = f(a^2, 2k) = 1$
- ㉢ (참)
(i) $a > 0$ 일 때, $f(a, 2n) = 2, f(a, 2n + 1) = 1$
 $\therefore f(a, 2n) > f(a, 2n + 1)$
(ii) $a = 0$ 일 때, $f(a, 2n) = f(a, 2n + 1) = 1$
 $\therefore f(a, 2n) = f(a, 2n + 1)$
(iii) $a < 0$ 일 때, $f(a, 2n) = 0, f(a, 2n + 1) = 1$
 $\therefore f(a, 2n) < f(a, 2n + 1)$
따라서 $a < 0$ 이면 $f(a, 2n) < f(a, 2n + 1)$ 이다.
그러므로 옳은 것은 ㉢뿐이다.

40. 거듭제곱근에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

보기

㉠ $\sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[5]{5}$

㉡ $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{36}] = 75$

㉢ $[\sqrt{a}] + [\sqrt{10-a}] = [\sqrt{10}]$ 을 만족하는 자연수 a 는 5개이다.

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[5]{5} \neq \sqrt[5]{5}$ (거짓)

㉡ $1 \leq n < 8$ 이면 $[\sqrt[3]{n}] = 1$
 $8 \leq n < 27$ 이면 $[\sqrt[3]{n}] = 2$
 $27 \leq n \leq 36$ 이면 $[\sqrt[3]{n}] = 3$
 $\therefore [\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{36}]$
 $= 1 \times 7 + 2 \times 19 + 3 \times 10 = 75$ (참)

㉢ $1 \leq a < 10$ 이면 $1 \leq [\sqrt{a}] \leq 3$ 이다.
 $[\sqrt{10}] = 3$ 이므로 다음 세 경우를 생각할 수 있다.
(i) $[\sqrt{a}] = 1, [\sqrt{10-a}] = 2$ 인 경우
 $[\sqrt{a}] = 1$ 이면 $1 \leq \sqrt{a} < 2$ 이므로 $1 \leq a < 4$
 $[\sqrt{10-a}] = 2$ 이면 $2 \leq \sqrt{10-a} < 3$ 이므로
 $1 < a \leq 6$
 $\therefore 1 < a < 4$ 에서 $a = 2, 3$
(ii) $[\sqrt{a}] = 2, [\sqrt{10-a}] = 1$ 인 경우
같은 방법으로 $6 < a < 9 \therefore a = 7, 8$
(iii) $[\sqrt{a}] = 3, [\sqrt{10-a}] = 0$ 인 경우
같은 방법으로 $9 < a \leq 10 \therefore a = 10$

따라서, (i), (ii), (iii)에서 $a = 2, 3, 7, 8, 10$ (참)

41. 거듭제곱근의 성질에 대하여 옳은 것을 다음 보기에서 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 8의 세제곱근은 2, $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$ 이다.
- ㉡ n 이 홀수일 때, -2 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{2}$ 뿐이다.
- ㉢ $x > 1$ 이면 $\sqrt[3]{(1-x)^3} = x - 1$ 이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x^3 = 8$ 에서 $x^3 - 8 = 0$
 $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
 $\therefore x = 2, x = -1 \pm \sqrt{3}i$ (참)
㉡ n 이 홀수일 때,
 -2 의 n 제곱근 중 실수인 것은
 $\sqrt[n]{-2} = \sqrt[n]{(-1) \times 2} = \sqrt[n]{(-1)^n \times 2}$ (참)
 $= -\sqrt[n]{2}$
㉢ $x > 1$ 일 때, $\sqrt[3]{(1-x)^3} = x - 1$ (거짓)
따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

42. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[4]{n}$ 의 정수 부분을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k)$ 의 값이 200 이상이 되도록 하는 자연수 k 의 최솟값은?

① 99 ② 100 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

(i) $1 \leq n < 16$ 일 때,
 $1^4 \leq n < 2^4$ 이므로 $1 \leq \sqrt[4]{n} < 2$
 $\therefore f(n) = 1$
 $\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(15) = 15$
(ii) $16 \leq n < 81$ 일 때,
 $2^4 \leq n < 3^4$ 이므로 $2 \leq \sqrt[4]{n} < 3$
 $\therefore f(n) = 2$
 $\therefore f(16) + f(17) + f(18) + \cdots + f(80)$
 $= 2 \times 65 = 130$
(iii) $3^4 \leq n < 4^4$ 일 때,
 $3 \leq \sqrt[4]{n} < 4$ 이므로 $f(n) = 3$
(i),(ii),(iii)에서 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(k)$ 중에서
 $f(n) = 3$ 인 자연수의 개수를 p 라 하면
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k)$
 $= 15 + 130 + 3 \times p = 145 + 3p$
 $145 + 3p \geq 200 \quad \therefore p \geq \frac{55}{3} = 18.\times \times$
따라서 조건을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 $80 + 19 = 99$

43. $0 < a < 1$ 이고 n 이 1보다 큰 정수 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a < {}^{n-1}\sqrt{a^n} < \sqrt[n]{a^{n+1}}$

② $a < \sqrt[n]{a^{n+1}} < {}^{n-1}\sqrt{a^n}$

③ ${}^{n-1}\sqrt{a^n} < a < \sqrt[n]{a^{n+1}}$

④ $\sqrt[n]{a^{n+1}} < a < {}^{n-1}\sqrt{a^n}$

⑤ ${}^{n-1}\sqrt{a^n} < \sqrt[n]{a^{n+1}} < a$

해설

$${}^{n-1}\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n-1}}, a = a^1, \sqrt[n]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}}$$

$0 < a < 1$ 이므로 지수가 작은 수가 크다.

$$\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n} > 1 \text{ 이므로 } a^{\frac{n}{n-1}} < a^{\frac{n+1}{n}} < a$$

$$\therefore {}^{n-1}\sqrt{a^n} < \sqrt[n]{a^{n+1}} < a$$

44. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

① $3^{55} < 4^{44} < 5^{33}$

② $3^{55} < 5^{33} < 4^{44}$

③ $4^{44} < 3^{55} < 5^{33}$

④ $5^{33} < 4^{44} < 3^{55}$

⑤ $5^{33} < 3^{55} < 4^{44}$

해설

$$3^{55} = (3^5)^{11}$$

$$4^{44} = (4^4)^{11}$$

$$5^{33} = (5^3)^{11}$$

$$3^5 = 243, 4^4 = 256, 5^3 = 125$$

$$\text{이므로 } (5^3)^{11} < (3^5)^{11} < (4^4)^{11}$$

45. 다음은 정수 m, n 에 대하여 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n} (a > 0)$ 을 유리수 지수로 확장할 수 있음을 증명한 것이다.

증명

m, n 을 유리수라 하면 정수 $p, q, r, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[p]{a^{qr}} \sqrt[r]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} a^{ps}} = \sqrt[p]{a^{(qr+ps)}} \\ a &= \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = a^{m+n} \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : pr , (나) : $qr + ps$
- ② (가) : pr , (나) : $pq + rs$
- ③ (가) : qs , (나) : $qr + ps$
- ④ (가) : qs , (나) : $pq + rs$
- ⑤ (가) : pq , (나) : $pq + rs$

해설

m, n 이 유리수라 하면 정수 $p, q, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{qr}{pr}} a^{\frac{ps}{pr}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr}} \cdot \sqrt[p]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} \cdot a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr+ps}} \\ &= a^{\frac{qr+ps}{pr}} = a^{\frac{q}{p} + \frac{s}{r}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

따라서, (가) : pr , (나) : $qr + ps$

46. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{n}}$ 과 $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{n}}$ 의 값이 모두 자연수가 되도록 하는 정수 n 의 값의
합은?

- ① -12 ② -15 ③ -12 ④ -10 ⑤ -6

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{n}} = 3^{-\frac{12}{n}}, \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{n}} = 2^{-\frac{18}{n}}$ 이므로 이 두 수가 모두 자연
수가 되려면 $-\frac{12}{n}, -\frac{18}{n}$ 이 자연수이어야 한다.

$\therefore n = -1, -2, -3, -6$

따라서 구하는 정수의 합은

$$(-1) + (-2) + (-3) + (-6) = -12$$

47. $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = 2$
㉡ $\frac{a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2}$
㉢ $(2^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(2+ab)(2^2+a^2b^2)(2^4+a^4b^4)(2^8+a^8b^8) = \frac{1}{b}(2^{16}-1)$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, b = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$
㉠ $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$ (참)
㉡ $\frac{a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{a(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) + b(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a + b = 2\sqrt{2}$
㉢ $ab = 1$ 이므로
 $(ab)^{\frac{1}{2}} = ab = (ab)^2 = (ab)^4 = (ab)^8 = 1$
 $(2^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(2+ab)(2^2+a^2b^2)(2^4+a^4b^4)(2^8+a^8b^8) = (2^{\frac{1}{2}} + 1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
 $(2^{\frac{1}{2}} + 1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) = A$ 라 하면
 $bA = (2^{\frac{1}{2}} - 1)A$
 $= (2^{\frac{1}{2}} - 1)(2^{\frac{1}{2}} + 1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4+1)(2^8+1)$
 $= 2^{16} - 1$
 $\therefore A = \frac{1}{b}(2^{16} - 1)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

48. $x = 2^{\frac{3}{4}} - 2^{-\frac{3}{4}}$ 일 때, $x^4 + 4x^2$ 의 값은?

① $\frac{47}{8}$

② $\frac{49}{8}$

③ $\frac{51}{8}$

④ $\frac{53}{8}$

⑤ $\frac{55}{8}$

해설

$$x^2 = (2^{\frac{3}{4}} - 2^{-\frac{3}{4}})^2$$

$$x^2 = 2^{\frac{3}{2}} - 2 + 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$x^4 = (2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}})^2 - 4(2^{\frac{3}{2}} - 2^{-\frac{3}{2}}) + 4$$

$$x^4 + 4(2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}) = (2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}})^2 + 4$$

$$2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} = x^2 + 2 \text{ 이므로}$$

$$x^4 + 4(x^2 + 2) = 2^3 + 2^{-3} + 2 + 4$$

$$x^4 + 4x^2 = 8 + 2 + \frac{1}{8} + 4 - 8$$

$$= \frac{49}{8}$$

49. $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ 일 때, $y = 9^x + 9^{-x}$ 을 $f(x)$ 로 나타내면?

- ① $\frac{1 + 2\{f(x)\}^2}{1 - \{f(x)\}^2}$ ② $\frac{1 + 2\{f(x)\}^2}{1 + \{f(x)\}^2}$ ㉓ $\frac{2 + 2\{f(x)\}^2}{1 - \{f(x)\}^2}$
 ④ $\frac{3f(x)}{1 + \{f(x)\}^2}$ ⑤ $\frac{3f(x)}{1 + \{f(x)\}^2}$

해설

$f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ 의 분자 · 분모에 3^x 를 곱하면

$$f(x) = \frac{9^x - 1}{9^x + 1}$$

$$f(x) \cdot (9^x + 1) = 9^x - 1$$

$$9^x = \frac{-1 - f(x)}{f(x) - 1}$$

$$= -\frac{f(x) + 1}{f(x) - 1}$$

$$y = 9^x + 9^{-x}$$

$$= -\frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} - \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$$

$$= -\frac{\{f(x)\}^2 + 2 \cdot f(x) + 1}{\{f(x)\}^2 - 1}$$

$$= -\frac{\{f(x)\}^2 - 2\{f(x)\} + 1}{\{f(x)\}^2 - 1}$$

$$= -\frac{2\{f(x)\}^2 + 2}{\{f(x)\}^2 - 1}$$

$$= \frac{2 + 2\{f(x)\}^2}{1 - \{f(x)\}^2}$$

50. 두 실수 x, y 가 등식 $27^x = 4^y = 80$ 을 만족할 때, 다음 중 $x, y, \frac{y}{x}$ 의
대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $x < y < \frac{y}{x}$

② $x < \frac{y}{x} < y$

③ $\frac{y}{x} < x < y$

④ $y < \frac{y}{x} < x$

⑤ $y < x < \frac{y}{x}$

해설

$27^x = 3^{3x} = 80$ 에서 $3^3 < 80 < 3^4$ 이므로

$$3 < 3x < 4 \quad \therefore 1 < x < \frac{4}{3} \cdots \cdots \text{㉠}$$

또, $4^y = 2^{2y} = 80$ 에서 $2^6 < 80 < 2^7$ 이므로

$$6 < 2y < 7 \quad \therefore 3 < y < \frac{7}{2} \cdots \cdots \text{㉡}$$

또, $27^x = 4^y$ 에서 $4^{\frac{y}{x}} = 2^{\frac{2y}{x}} = 27$ 이고 $2^4 < 27 < 2^5$ 이므로

$$4 < \frac{2y}{x} < 5 \quad \therefore 2 < \frac{y}{x} < \frac{5}{2} \cdots \cdots \text{㉢}$$

따라서, ㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 대소 관계는

$$x < \frac{y}{x} < y$$

51. 세 자리의 자연수 M 에 대하여 M 의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 서로 바꾼 수를 N 이라 하자. 이때, $(M - N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되는 자연수 M 의 개수는? (단, $M > N$)

- ① 45 ② 54 ③ 63 ④ 72 ⑤ 81

해설

M 의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c 라고 하면

$$M = 100a + 10b + c, N = 100a + 10c + b$$

$$\text{이므로 } M - N = 9(b - c) = 3^2(b - c)$$

$(M - N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되려면 $b - c$ 가 $-3, 0, 3$ 이 되어야 한다.

그런데 $M > N$ 에서 $b > c$ 이므로 $b - c = 3$

따라서, b, c 의 순서쌍 (b, c) 는

$(3, 0), (4, 1), (5, 2), \dots, (8, 5), (9, 6)$ 의 7개이고,

a 는 $1 \leq a \leq 9$ 인

자연수이므로 세 자리의 자연수

M 의 개수는 $7 \times 9 = 63$ (개)

52. $\sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt[3]{\frac{n}{3}}, \sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되게 하는 실수 n 의 최솟값을 $2^a3^b5^c$ 의 꼴로 나타낼 때, $a+b+c$ 의 값은?(단, a, b, c 는 자연수이다.)

- ① 19 ② 23 ③ 27 ④ 31 ⑤ 35

해설

$n = 2^a3^b5^c$ 에서

$\sqrt{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되려면 $a = 2k_1 + 1, b$ 와 c 는 2의 배수

$\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$ 이 자연수가 되려면 $b = 3k_2 + 1, a$ 와 c 는 3의 배수

$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되려면 $c = 5k_3 + 1, a$ 와 b 는 5의 배수

(단, $k_1, k_2, k_3 = 0, 1, 2, \dots$)

$\therefore a = 15, b = 10, c = 6$

$\therefore a + b + c = 31$