1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= 9+18=27\end{aligned}$$

$$\therefore\ a+b+c=\pm 3\sqrt{3}$$

2. x에 대한 항등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

▷ 정답 : $c=1$

해설

계수비교법에 의하여

$$\begin{aligned} x^2-2x+3 &= a+b(x-1)+cx(x-1) \\ &= cx^2+(b-c)x+a-b \end{aligned}$$

$x^2-2x+3=cx^2+(b-c)x+a-b$에서

$c=1,\ b-c=-2,\ a-b=3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=1$

3. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

4. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

5. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$라 하면

$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -8$

$\therefore\ a - b = 11$

6. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

7. $\dfrac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$$

$1-2i=x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

8. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

9. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

10. $x+y+z=1,\ xy+yz+zx=2,\ xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$

$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$

$= 7$

11. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

12. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면

$x=2$일 때

$$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$$

$$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$$

$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$ ㉠

$x=-2$일 때

$$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$$

$\therefore\ -2A+B=6\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$

$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$
④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

14. 100개의 다항식 x^2-x-1 , x^2-x-2 , $\cdots$, $x^2-x-100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개 ② 7개 ③ 9개 ④ 11개 ⑤ 13개

해설

$x^2-x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
$b=a+1$, $ab=n$ $(1 \le n \le 100)$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

15. 다항식 $6x^3+5x^2-2x-1$을 인수분해하면?

① $(x-1)(2x-1)(2x+1)$

② $(x+1)(2x+1)(2x-1)$

③ $(x+1)(2x+1)(3x-1)$

④ $(x+1)(2x-1)(3x+1)$

⑤ $(x-1)(2x+1)(2x-1)$

해설

$f(x)=6x^3+5x^2-2x-1$이라 하면

$f(-1)=0$이므로

$f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

$\therefore\ 6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)(6x^2-x-1)$

$=(x+1)(2x-1)(3x+1)$

16. $x^2 = 3 - \sqrt{2}$일 때, $\dfrac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1}$의 값은?

① $8 - 6\sqrt{2}$ ② $8 - 4\sqrt{2}$ ③ $5 - 6\sqrt{2}$

④ $5 - 4\sqrt{2}$ ⑤ $3 - 6\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1} &= \frac{x^4(x-1) - 3(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{(x^4 - 3)(x - 1)}{x - 1} \\ &= x^4 - 3 \\ &= (3 - \sqrt{2})^2 - 3 \\ &= 11 - 6\sqrt{2} - 3 = 8 - 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

17. 두 다항식 $x^3+2x^2-x-2, 2x^3+(a-2)x^2-2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$x^3+2x^2-x-3=x^2(x+2)-(x+2)$

$=(x+2)(x-1)(x-2)$

$2x^3+(a-2)x^2-2x=x(2x^2+(a-2)x-2)\cdots$ ①

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x=-2,-1,1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$x=-2$ 일 때, $8-2a+4-2=0,\ a=5$

$x=-1$ 일 때, $2-a+2-2=0,\ a=2$

$x=1$ 일 때, $2+a-2-2=0,\ a=2$

$x=-1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$

$\therefore\ a=2$

18. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$이고, 최소공배수가 $x^3-3x^2-4x+12$일 때, 이 두 다항식의 합을 구하면?

① x^2-x-10 ② $2x^2-x-10$ ③ x^2-x-12

④ $2x^2-x-20$ ⑤ $2x^2+x-10$

해설

a, b가 서로소일 때, 두 다항식이 $(x+2)a, (x+2)b$이면 최소공배수는 $(x+2)ab$이다.

$$x^3-3x^2-4x+12=(x+2)ab$$
$$=(x+2)(x-2)(x-3)$$

따라서 두 다항식은 각각

$(x+2)(x-2), (x+2)(x-3)$

∴(두 다항식의 합)

$=(x+2)(x-2)+(x+2)(x-3)$

$=2x^2-x-10$

19. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3 + 3i$$

20. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2\text{에서}$$

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0\ \therefore\ k=12,\ -3$

21. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

22. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

23. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=-1-3\cdot(-1)=2$$

24. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $4x+3$　　③ $x-1$

④ $4x-9$　　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

25. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$를 x^2+x+1로 나누면 나머지가 -3이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$$f(x)=(x^2+x+1)\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$$

$\therefore$ 나머지는 3

26. 1000^{10} 을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

27. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$이다. 이때, $A + B + C + D$의 값을 구하면 ?

① 4　　② 14　　③ 24　　④ 34　　⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
 & & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & & \\
\end{array}
$$

$\therefore\ A = 3,\ B = 9,\ C = 8,\ D = 4$

$\therefore\ A + B + C + D = 24$

28. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형

② x가 빗변인 직각삼각형

③ $x=y$인 이등변삼각형

④ $y=z$인 이등변삼각형

⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$

$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$

$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$

$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)

$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

29. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99 ② 100 ③ 4950

④ 5050 ⑤ 10000

해설

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + 99^2$
$= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$
$= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) +$
$\cdots + (3^2 - 2^2) + 1^2$
$= (99-98)(99+98) + (97-96)(97+96) + \cdots + (3-2)(3+2) + 1$
$= (99+98) + (97+96) + \cdots + (3+2) + 1$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$
$= (1+99) + (2+98) + \cdots + (49+51) + 50$
$= 4950$

30. 유리수 a, b, c, d에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
a, b, c, d 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

31. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i, \frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

32. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다. ㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다. ㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다. ㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는
실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.

㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$
$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

33. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개

④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

34. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \quad \cdots$ ㉠

$1-a+c=0 \quad \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

35. $(1-x-x^2)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$라 할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=A$, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=B$에 대하여 $A+2B$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2=2(a_0+a_2+\cdots+a_{100})$

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots+a_{100}=1$

$\therefore\ A=1$

㉠ − ㉡하면

$0=2(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$

$a_1+a_3+\cdots+a_{99}=0\quad\therefore\ B=0$

$\therefore\ A+2B=1$

36. 다항식 $x^3 - 2x^2 + mx - 4$를 $x - 1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x + 1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6　　② 4　　③ 0　　④ -1　　⑤ -6

해설

$x^3 - 2x^2 + mx - 4 = (x-1)Q(x) + R$이라 하자.

$x = 1$을 대입하면 $R = m - 5$

$x^3 - 2x^2 + mx - 4 = (x-1)Q(x) + m - 5 \cdots$ ①

$Q(x)$를 $x + 1$로 나눈 나머지가 -5이므로

$Q(-1) = -5$

①식에 $x = -1$을 대입하면

$-1 - 2 - m - 4 = -2Q(-1) + m - 5$

$-2m = 12$

$\therefore\ m = -6$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & m & -4 \\ & & 1 & -1 & m-1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & m-1 & \multicolumn{1}{|r}{m-5} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{m+1} & \end{array}$$

$m + 1 = -5 \therefore\ m = -6$

37. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

38. 어느 회사의 A공장과 B공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A공장에서는 모니터를 400 대, B공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 $50,000$ 원, 주말에는 $70,000$ 원을 지불한다. 2008 년 4 월 1 일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008 년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : ______ 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4 월 1 일, 4 월 2 일 $\cdots$ 을 각각 $1,\ 2\cdots$ 라 하면
12 월 31 일은 275 이다.
모니터가 운반되는 날이 $5a+1$ 이고
스피커가 운반되는 날이 $8b+2$ 이면,
같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a+1=8b+2$
$b=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ 를 대입하면
$b=5k+3$ 일 때, 성립한다.
그러므로 같은날 운반되는 경우
$\rightarrow 40k+26\ (k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 이다.
금년에 같은 날 운반
$26,\ 66,\ 106,\ 146,\ 186,\ 226,\ 266$ 이고,
이들 중 평일은 5 일, 주말은 2 일 이므로
$(50000\times5)+(70000\times2)\ =\ 250000+140000\ =\ 390000$

39. a, b가 정수이고, $P(x) = x^2 + ax + b$라 한다. x의 다항식 $P(x)$가 $x^4 + 6x^2 + 25$, $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$의 공약수일 때, $P(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x^4 + 6x^2 + 25 = P(x)A(x) \quad \cdots$ ①

$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = P(x)B(x) \quad \cdots$ ②라 하고,

① $\times 3 -$ ② 하면

$P(x)\{3A(x) - B(x)\} = 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5)$

그런데 $P(x) = x^2 + ax + b$ 이므로

$P(x) = x^2 - 2x + 5 \quad \therefore \ P(3) = 8$

40. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\overline{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 $x,\ y$ 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로
직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\overline{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\overline{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \overline{\alpha} = 1,\ \alpha\overline{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1},\ \overline{z} = \dfrac{\overline{\alpha} - 1}{\overline{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\overline{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\overline{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\overline{\alpha} - (\alpha + \overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + (\alpha + \overline{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\overline{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

41. 정수 n을 3으로 나눈 나머지를 a라 할 때, $f(n)=3+ai$로 나타내기로 한다. 이 때, $f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $21-27i$ ② $21+27i$ ③ $27+21i$

④ $27-21i$ ⑤ $30+25i$

해설

a는 0, 1, 2 중 어느 한 값이다.
n을 3으로 나눈 나머지를 0이라 생각하면
$n-1$, $n+1$을 3으로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(n)=3$, $f(n-1)=3+2i$, $f(n+1)=3+i$
$\therefore\ f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$
$=(3+2i)\cdot 3\cdot(3+i)$
$=21+27i$
(n을 3으로 나눈 나머지를 1이나 2로 생각하여도 $f(n-1)\cdot f(n)\cdot f(n+1)$의 결과는 같다.)

42. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$	㉡ $\alpha+\overline{\alpha}=-1$
㉢ $\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2=\overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2+bx+a=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ $\alpha+\overline{\alpha}=-1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha}=1,\ \frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$

㉣ $x^2+x+1=0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

43. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \dfrac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

44. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n \neq 0)$라 놓으면

$$\alpha^2 + 2\beta = (m+ni)^2 + 2(m-ni)$$
$$= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m-1)i = 1$$ 에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

45. 실계수 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 α는 허수이고, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$은 실수이다. 이 때, $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3$의 값은?

① 0 ② -1 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

α가 근이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
$\beta=\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}=\alpha\cdots\cdots$①

$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)}$

$\therefore\ \overline{\alpha}\beta^2=\alpha\overline{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2=\alpha\alpha^2$
$\therefore\ \beta^3=\alpha^3$

$$\therefore\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=\frac{\beta^3}{\alpha^3}=1$$