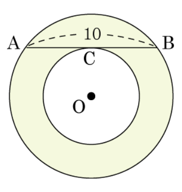
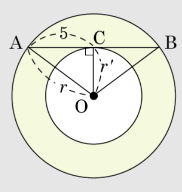
1. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB 가 작은 원에 접하고, $\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① 10π　② 15π　③ 20π　④ 25π　⑤ 30π

해설

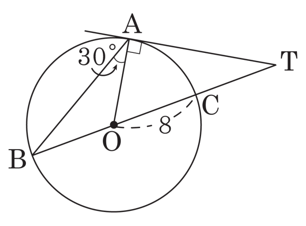


큰 원의 반지름의 길이를 r , 작은 원의 반지름의 길이를 r' 라고 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 작은 원의 접선이므로 $\overline{\mathrm{OC}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = 5$ 이다.

직각삼각형 $\triangle\mathrm{ACO}$ 에서 $r^2 - r'^2 = 5^2$ 이다.
색칠한 부분의 넓이$= \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2) = 25\pi$ 이다.

2. 그림에서 $\overline{AT}$ 는 반지름의 길이가 8 인 원 O 의 접선이고 점 A 는 접점이다. $\angle BAO = 30^\circ$ 일 때, $\overline{CT}$ 의 길이를 구하면?



① 6　　② 8　　③ 10

④ 12　　⑤ 13

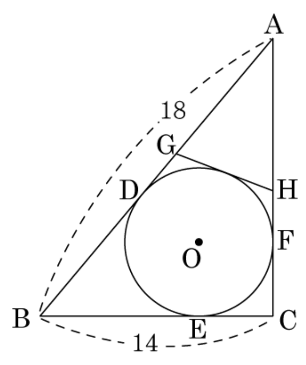
해설

$\angle AOC = 60^\circ,\ \angle ATC = 30^\circ,\ \overline{OA} = 8$

$1 : 2 = 8 : \overline{OT} \quad \therefore \overline{OT} = 16$

$\therefore \overline{CT} = 16 - 8 = 8$

3. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고, 세 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 14$, $\triangle AGH$ 의 둘레의 길이가 20 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이는?

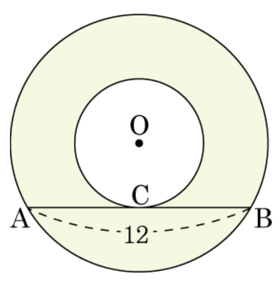


① 10　② 12　③ 16　④ 17　⑤ 18

해설

접선의 성질에 따라 $\overline{AD} = \overline{AF}$
$\triangle AGH$ 의 둘레는 $\overline{AD} + \overline{AF} = 2 \times \overline{AD}$
$\triangle AGH$ 의 둘레가 20 이므로 $\overline{AD} = \overline{AF} = 10$
$\therefore \overline{BD} = \overline{BE} = 8,\ \overline{EC} = \overline{CF} = 6$
$\therefore \overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF} = 10 + 6 = 16$

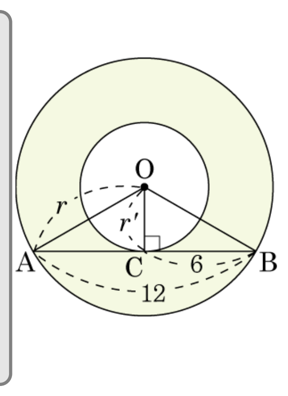
4. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB 가 작은 원에 접하고, $\overline{AB}=12$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하면?



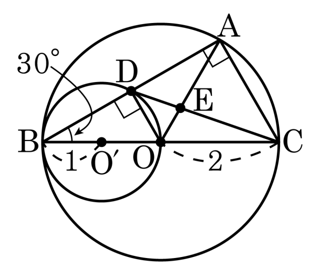
① 20π ② 25π ③ 30π ④ 36π ⑤ 40π

해설

큰 원의 반지름의 길이를 r, 작은 원의 반지름의 길이를 $r\prime$ 이라고 하자.
$\overline{AB}$ 는 작은 원의 접선이므로
$\overline{OC}\perp\overline{AB}$, $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6$
직각삼각형 $\triangle ACO$ 에서 $r^2-r\prime^2=6^2$
(색칠한 부분의 넓이)$=\pi r^2-\pi r\prime^2=\pi(r^2-r\prime^2)=36\pi$

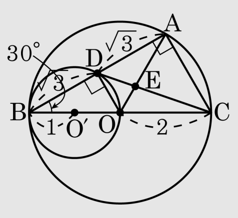


5. 다음 그림의 원 O 의 지름은 4 , 원 O′ 의 지름은 2 , $\angle ABC = 30°$ 이다. 이때, $\overline{OE}$ 의 길이는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

해설

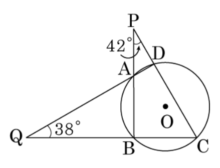


$\overline{AD} = \overline{BD} = \sqrt{3}$, $\overline{BO} = \overline{CO} = 2$ 이므로 점 E 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

$\overline{AO} = 2$

$\therefore \overline{OE} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

6. 다음 그림과 같이 원 O 에 내접하는 □ABCD 에서 $\overline{\mathrm{DA}}$ 와 $\overline{\mathrm{CB}}$ 의 연장선의 교점을 Q , $\overline{\mathrm{BA}}$ 와 $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 연장선의 교점을 P 라 하자. $\angle\mathrm{P} = 42°$, $\angle\mathrm{Q} = 38°$ 일 때, $\angle\mathrm{BCD}$ 의 크기는?

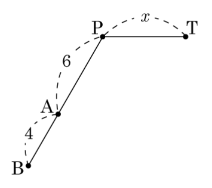


① 50° ② 52° ③ 54° ④ 56° ⑤ 58°

해설

$\angle\mathrm{BCD} = x$ 라고 하면
$\angle\mathrm{CBP} = 180° - 42° - x = 138° - x$
$\angle\mathrm{QDC} = 180° - 38° - x = 142° - x$
□ABCD 가 원에 내접하므로
$138° - x + 142° - x = 180° - 2x = -100°$
$\therefore \angle x = 50°$

7. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 가 세 점 A, B, T 를 지나는 원의 접선이 되도록 하는 x 의 값은?

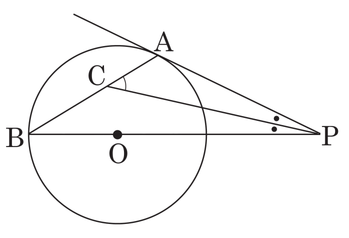


① $2\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

$x^2 = 6 \times 10 \quad \therefore x = 2\sqrt{15}$

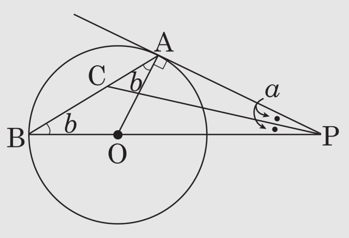
8. 다음 그림에서 $\overline{PA}$ 는 원 O 와 점 A 에서 접하고, 선분 PO 의 연장선과 원 O 가 만나는 점을 B 라 한다. 또, $\angle APB$ 의 이등분선이 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 C 라 할 때, $\angle PCA$ 의 크기를 구하면?



① $25°$ ② $30°$ ③ $45°$ ④ $50°$ ⑤ $60°$

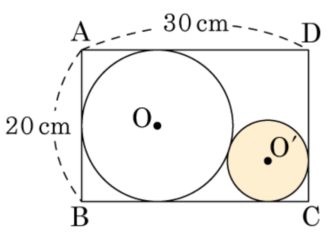
해설

점 A 와 점 O 를 연결하면
$\angle OAP = 90°$



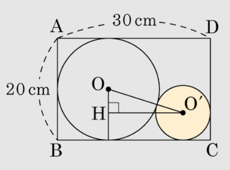
$\angle APC = \angle OPC = a$, $\angle OAB = \angle OBA = b$ 라 하면, $\triangle ABP$ 에서 $90° + 2(a+b) = 180°$
$\therefore a + b = 45°$
$\triangle CBP$ 에서 $\angle PCA = \angle CPB + \angle CBP$
$\therefore \angle PCA = a + b = 45°$

9. 다음 그림에서 원 O 는 직사각형 ABCD 에 내접하는 큰 원이고 원 O′ 은 그 나머지 부분에 내접하는 작은 원이다. 원 O′ 의 넓이는?



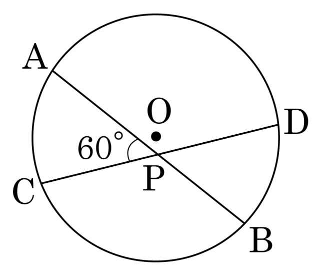
① $400(10-17\sqrt{3})\mathrm{cm}^2$　② $400(7-4\sqrt{3})\mathrm{cm}^2$
③ $420(10-19\sqrt{3})\mathrm{cm}^2$　④ $400(100-20\sqrt{3})\mathrm{cm}^2$
⑤ $410(10-21\sqrt{3})\mathrm{cm}^2$

해설



그림과 같이 보조선을 그어 $\triangle O'OH$ 에서
$\overline{OO'} = 10 + x$
$\overline{OH} = 10 - x$
$\overline{O'H} = 20 - x$
$\overline{OO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2$ 에서
$(10+x)^2 = (10-x)^2 + (20-x)^2$
$x^2 - 80x + 400 = 0$
$x = 40 \pm 20\sqrt{3}$
x 는 30 보다 작으므로 $x = (40-20\sqrt{3})$ cm 이다.
$\therefore$ (원 O′ 의 넓이)$= \pi(40-20\sqrt{3})^2 = 400(7-4\sqrt{3})(\mathrm{cm}^2)$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O 에서 $\angle APC = 60°$ 일 때, $5.0pt\overset{\frown}{AC} + 5.0pt\overset{\frown}{BD}$ 의 값은?



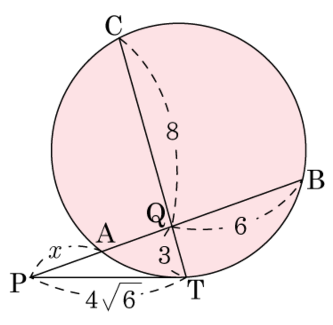
① $\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ $\frac{15}{3}\pi$ ④ $\frac{20}{3}\pi$ ⑤ $\frac{25}{3}\pi$

해설

$\angle ADC + \angle DAB = 60°$

$5.0pt\overset{\frown}{AC} + 5.0pt\overset{\frown}{BD} = \frac{60°}{180°} \times 20\pi = \frac{20}{3}\pi$

11. 다음 그림에서 원 밖의 한 점 P 에서 그은 접선 PT 와 할선 PB 가 다음과 같을 때, x 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5

④ 6　　⑤ 7

해설

$\overline{AQ} \times \overline{QB} = \overline{CQ} \times \overline{QT}$

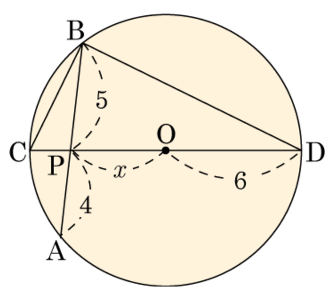
$\overline{AQ} \times 6 = 8 \times 3 \qquad \therefore\ \overline{AQ} = 4$

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 에서 $(4\sqrt{6})^2 = x(x+10)$

$x^2 + 10x - 96 = 0$

$(x+16)(x-6) = 0 \qquad \therefore\ x = 6\ (\because\ x > 0)$

12. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{CD}}$ 는 원 O 의 지름이다. 원 O 의 반지름의 길이가 6 이고 $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{BD}} = b$, $\overline{\mathrm{PO}} = x$, $x = b - a$ 일 때, $\sqrt{ab}$ 를 구하면?

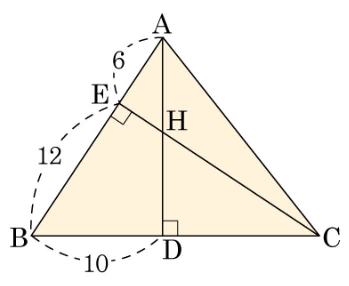


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$20 = (6-x)(6+x) \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 = b-a$, $\angle\mathrm{CBD} = 90°$
이므로 $a^2 + b^2 = 12^2$
$b - a = 4$ 의 양변을 제곱하면
$(b-a)^2 = 4^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = 16$
$144 - 2ab = 16$ $(\because a^2 + b^2 = 144)$
$-2ab = -128$
$\therefore \sqrt{ab} = 8$ $(\because ab > 0)$

13. 다음 그림에서 점 H는 $\triangle ABC$ 의 두 꼭짓점 A, C 에서 대변에 그은 수선이 만나는 점이다. $\overline{AE} = 6$, $\overline{EB} = 12$, $\overline{BD} = 10$ 일 때, $\overline{DC}$ 의 길이는?



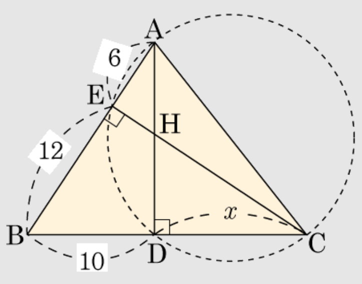
① 10　② 10.8　③ 11.2
④ 11.6　⑤ 12

해설

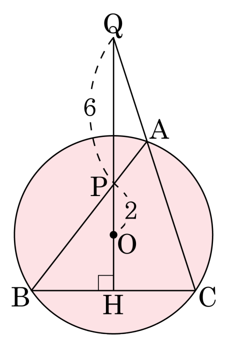
$\angle AEC = \angle ADC = 90°$ 이므로 네 점 A, E, D, C 는 한 원 위에 있다. $\overline{BE} \times \overline{BA} = \overline{BD} \times \overline{BC}$

$12 \times 18 = 10(10 + \overline{DC})$

$\therefore\ \overline{DC} = 11.6$



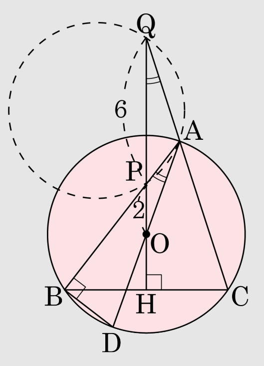
14. 다음 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$ 의 외접원이다. $\overline{BC}$ 의 수직이등분선이 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 P, $\overline{AC}$ 의 연장선과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{OP} = 2$, $\overline{PQ} = 6$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이는?



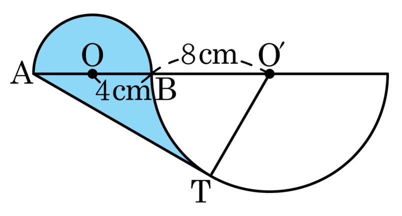
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\overline{AO}$ 의 연장선과 원과의 교점을 D라 하면
$\triangle ABD$와 $\triangle QHC$에서
$\angle ADB = \angle ACB$,
$\angle ABD = \angle QHC = 90°$ 이므로
$\angle DAB = \angle CQH$ 이다. 따라서, $\overline{OA}$ 는 $\triangle AQP$ 의 외접원의 접선이다.
즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OP} \times \overline{OQ} = 2 \times 8 = 16$
$\therefore\ \overline{OA} = 4\ (\because\ \overline{OA} > 0)$



15. 다음 그림에서 두 반원 O, O′ 의 반지름의 길이는 각각 4 cm, 8 cm 이다. $\overline{\mathrm{AT}}$ 가 반원 O′ 의 접선일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ ② $(8\pi + 32\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$

③ $\left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$ ④ $\left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $\left(64 - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{\mathrm{AT}}^2 = 8 \times 24 = 192 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{AT}} = 8\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

$\overline{\mathrm{AO'}} : \overline{\mathrm{AT}} : \overline{\mathrm{O'T}} = 2 : \sqrt{3} : 1$ 이므로 $\angle \mathrm{AO'T} = 60^\circ$

작은 반원의 넓이는 $\pi \times 4^2 \times \frac{1}{2} = 8\pi(\mathrm{cm}^2)$

$\triangle\mathrm{ATO'}$ 의 넓이는 $8 \times 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 32\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

부채꼴 O′BT 의 넓이는 $\pi \times 8^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{32}{3}\pi(\mathrm{cm}^2)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$8\pi + \left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right) = \left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)$ cm^2 이다.