1. 두 수 $2^a \times 7^3 \times 11^3$, $2^4 \times 5^2 \times 11^b$ 의 최대공약수가 88일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

최대공약수가 $88 = 2^3 \times 11$ 이고
$2^4 \times 5^2 \times 11^b$ 에서 2 의 지수가 4 이므로
$2^a \times 7^3 \times 11^3$ 에서 2 의 지수가 3 이어야 한다.
같은 방식으로
$2^a \times 7^3 \times 11^3$ 에서 11 의 지수가 3 이므로
$2^4 \times 5^2 \times 11^b$ 에서 11 의 지수가 1 이어야 한다.
따라서 $a = 3,\ b = 1$

2. 두 수 $2^3 \times 3^4 \times 5$, $2^a \times 5^2$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 5$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

최대공약수가 $2^2 \times 5$ 이고
$2^3 \times 3^4 \times 5$ 에서 2 의 지수가 3 이므로
$2^a \times 5^2$ 에서 2 의 지수가 2 이어야 한다.
따라서 $a = 2$

3. 두 수 $2^4 \times 5^3$, $2^a \times 3^2 \times 5^b$ 의 최대공약수가 50 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

최대공약수가 $50 = 2 \times 5^2$ 이고
$2^4 \times 5^3$ 에서 2 의 지수가 4 이므로
$2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 2 의 지수가 1 이어야 한다.
같은 방식으로
$2^4 \times 5^3$ 에서 5 의 지수가 3 이므로
$2^a \times 3^2 \times 5^b$ 에서 5 의 지수가 2 이어야 한다.
따라서 $a = 1$, $b = 2$

4. 다음 두 수의 최대공약수는?

$$2^3 \times 3 \times 5,\ 2^2 \times 3 \times 7$$

① 8 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 14

해설

$2^2 \times 3 = 12$

5. 다음 조건을 각각 만족하는 자연수의 개수의 합을 구하여라.

> ㉠ 최대공약수가 24 인 두 수 a, b 의 공약수
> ㉡ 50 보다 크지 않은 4 와 6 의 공배수

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

㉠ 최대공약수가 24 인 두 수 a, b 의 공약수는 24 의 공약수이므로
$24 = 2^3 \times 3^1$ 에서 약수의 개수는
$(3 + 1) \times (1 + 1) = 8$(개)
㉡ 4 와 6 의 최소공배수는 12 이므로
50 보다 작은 12 의 배수는 12, 24, 36, 48 의 4 개
$\therefore 8 + 4 = 12$

6. 자연수 n 에 대하여 $n+1$ 은 3 의 배수이고 $n+4$ 은 7 의 배수일 때, $n+6$ 을 21 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$n+1$ 은 3 의 배수이므로
값은 $2, 5, 8, 11, 14, \cdots$ 이고,
$n+4$ 은 7 의 배수이므로
값은 $3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, \cdots$ 이다.
그러므로 자연수 n 이 될 수 있는 수는
위 두 값의 공통부분이므로 $38, 59, 80, 101, 122, \cdots$ 이다.
$\therefore$ ($n+6$ 을 21 로 나눈 나머지)$=2$

7. 자연수 n 에 대하여 $n+3$ 은 5 의 배수이고 $n+5$ 는 3 의 배수일 때, $n+8$ 을 15 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$n+3$ 은 5 의 배수이므로
값은 $2, 7, 12, 17, 22, \cdots$ 이고,
$n+5$ 는 3 의 배수이므로
값은 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \cdots$ 이다.
그러므로 자연수 n 이 될 수 있는 수는
위 두 값의 공통부분이므로 $7, 22, 37, 52, \cdots$ 이다.
$\therefore$ ($n+8$ 을 15 로 나눈 나머지) $=0$

8. 세 변의 길이가 각각 $66\,\text{m}$, $84\,\text{m}$, $78\,\text{m}$ 인 삼각형 모양의 목장이 있다. 이 목장의 가장자리를 따라 일정한 간격으로 향나무를 심으려고 한다. 세 모퉁이는 반드시 향나무를 심어야 하며 나무의 개수는 될 수 있는 한 적게 하려고 할 때, 향나무를 최소한 몇 그루를 준비해야 하는지 고르면?

① 6 그루 ② 18 그루 ③ 24 그루
④ 38 그루 ⑤ 41 그루

해설

66, 84, 78 의 최대공약수는 6 이므로
나무의 수는

$$\begin{aligned}(66 \div 6) + (84 \div 6) + (78 \div 6) &= 11 + 14 + 13 \\ &= 38\ (\text{그루})\end{aligned}$$

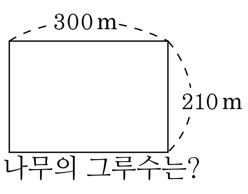
9. 가로의 길이가 450 m , 세로의 길이가 240 m 인 직사각형 모양의 목장이 있다. 목장의 가장자리를 따라 일정한 간격으로 나무를 심는데, 네 모퉁이에는 반드시 나무를 심는다고 한다. 나무를 가능한 한 적게 심으려면 나무의 간격은 얼마이어야 되는가?

① 30 m　② 15 m　③ 10 m　④ 3 m　⑤ 2 m

해설

나무를 가능한 한 적게 심으려면 심는 간격이 넓어야 하므로 450 과 240 의 최대공약수인 30 m 이다.

10. 다음 그림과 같이 가로의 길이가 $300\,\mathrm{m}$, 세로의 길이가 $210\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅의 둘레에 일정한 간격으로 나무를 심으려고 한다. 네 모퉁이에는 반드시 나무를 심어야 하고 나무를 가능한 한 적게 심으려고 할 때, 필요한 나무의 그루수는?



① 32 그루　② 34 그루　③ 36 그루
④ 38 그루　⑤ 40 그루

해설

나무의 간격은 $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$,
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 의 최대공약수 $30\ (\mathrm{m})$,
나무 사이의 간격을 $30\,\mathrm{m}$ 라 할 때,
가로 $300 = 30\ (\mathrm{m}) \times 10$ (그루)
세로 $210 = 30\ (\mathrm{m}) \times 7$ (그루)
직사각형 모양의 꽃밭의 가장자리에 필요한 나무 그루수는
$(10 + 7) \times 2 = 34$ (그루)

11. 가로, 세로의 길이가 각각 $48\,\mathrm{m}$, $32\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 꽃밭의 가장자리에 일정한 간격으로 나무를 심으려고 한다. 네 모퉁이에는 반드시 나무를 심어야 한다. 이때, 나무 그루수를 가능한 적게 하려고 할 때, 나무 사이의 간격은?

① $14\,\mathrm{m}$ ② $16\,\mathrm{m}$ ③ $18\,\mathrm{m}$ ④ $20\,\mathrm{m}$ ⑤ $22\,\mathrm{m}$

해설

나무 사이의 간격을 x 라 할 때,

$48 = x \times \square,\ 32 = x \times \triangle$

x 는 48과 32의 최대공약수이므로

$48 = 2^4 \times 3,\ 32 = 2^5$

$\therefore\ x = 2^4 = 16\ (\mathrm{m})$

12. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로, (a, b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 $(0,\ 5)$, $(5,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$ 이다.

i) $(a, b) = (0, 5)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.
ii) $(a, b) = (5, 0)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.
iii) $(a, b) = (1, 2)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.
iv) $(a, b) = (2, 1)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.
따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

13. 약수의 개수가 36 개이고, $2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인가? (단, x, y, z 는 자연수)

① 3 개 ② 6 개 ③ 9 개 ④ 12 개 ⑤ 15 개

해설

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로
$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$ 으로 3 개이다.

14. 자연수 672 의 약수의 개수와 $2^2 \times a^n \times 11^3$ 의 약수의 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라. (단, a는 소수)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$672 = 2^5 \times 3 \times 7$

(약수의 개수) $= 24$(개)

$(2+1) \times (n+1) \times (3+1) = 24$

$\therefore\ n = 1$

15. 두 자연수 $x,\ y$ 에 대하여 $2^x \times 3 \times 5^y$ 의 약수의 개수가 36일 때, $x+y$ 의 값으로 알맞은 것을 모두 구하면?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(x+1)\times(1+1)\times(y+1)=36$
$(x+1)\times(y+1)=18$
$18=2\times9$ 또는 $18=3\times6$이므로
$x+1=2,\ y+1=9$ 또는 $x+1=9,\ y+1=2$일 때,
$x=1,\ y=8$ 또는 $x=8,\ y=1$
그러므로 $x+y=9$
$x+1=3,\ y+1=6$ 또는 $x+1=6,\ y+1=3$일 때,
$x=2,\ y=5$ 또는 $x=5,\ y=2$
그러므로 $x+y=7$

16. $2^3 \times 5 \times \boxed{} \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개라고 한다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 수를 작은 수부터 2개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 11

해설

$2^3 \times 5 \times \boxed{} \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개이면

$\boxed{}$ 가 가장 작은 소인수 3 인 경우와 그 다음 작은 소인수인 11 이 있다.

17. $n \times 5^2 \times 7^4$ 의 약수의 개수가 105 개일 때, n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

약수의 개수는 각 인수에 1 을 더한 값의 곱이므로,
$n = a^k$ 라 두면,
$(k+1) \times 3 \times 5 = 105$
$\rightarrow k+1 = 7$, $k = 6$
$\therefore n$ 의 최솟값$= 2^6 = 64$

18. $27 \times \boxed{}$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3 \times \boxed{}$ 에서 $\boxed{} = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1) \times (x+1) = 12$ (개) 이므로

$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$

$x+1 = 3 \qquad \therefore\ x = 2$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$\boxed{} = 2^2$

19. $a \times 3^2 \times 5^3$ 과 360 의 약수의 개수가 같을 때, a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \rightarrow 360$ 의 약수의 개수$= 4 \times 3 \times 2 = 24$
$a = x^n$ 이라 두면,
$a \times 3^2 \times 5^3$ 의 약수의 개수$= (n+1) \times 3 \times 4 \rightarrow n = 1$
$\therefore a$ 의 최솟값$= 2$