

1. 다음 조건을 각각 만족하는 자연수의 개수의 합을 구하여라.

㉠ 최대공약수가 24인 두 수 a, b 의 공약수

㉡ 50보다 크지 않은 4와 6의 공배수

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

㉠ 최대공약수가 24인 두 수 a, b 의 공약수는 24의 공약수이므로

$24 = 2^3 \times 3^1$ 에서 약수의 개수는

$$(3 + 1) \times (1 + 1) = 8(\text{개})$$

㉡ 4와 6의 최소공배수는 12이므로

50보다 작은 12의 배수는 12, 24, 36, 48의 4개

$$\therefore 8 + 4 = 12$$

2. 자연수 n 에 대하여 $n + 1$ 은 3 의 배수이고 $n + 4$ 은 7 의 배수일 때, $n + 6$ 을 21 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$n + 1$ 은 3 의 배수이므로

값은 2, 5, 8, 11, 14, ... 이고,

$n + 4$ 은 7 의 배수이므로

값은 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, ... 이다.

그러므로 자연수 n 이 될 수 있는 수는

위 두 값의 공통부분이므로 38, 59, 80, 101, 122, ... 이다.

$\therefore (n + 6 \text{ 을 } 21 \text{ 로 나눈 나머지}) = 2$

3. 자연수 n 에 대하여 $n + 3$ 은 5 의 배수이고 $n + 5$ 는 3 의 배수일 때, $n + 8$ 을 15 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$n + 3$ 은 5 의 배수이므로
값은 2, 7, 12, 17, 22, ... 이고,
 $n + 5$ 는 3 의 배수이므로
값은 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ... 이다.
그러므로 자연수 n 이 될 수 있는 수는
위 두 값의 공통부분이므로 7, 22, 37, 52, ... 이다.
 $\therefore (n + 8 \text{ 을 } 15 \text{ 로 나눈 나머지}) = 0$

4. A 와 B 가 함께 일자리를 구했다. A 는 4 일간 일하고 하루 쉬고, B 는 5 일간 일하고 이틀간 쉬기로 하였다. 이와 같이 180 일간 일한다면, 두 사람이 같이 쉬는 일수는?

- ① 5 일 ② 10 일 ③ 15 일 ④ 20 일 ⑤ 35 일

해설

5 와 7 의 최소공배수는 35 ,
35 일 동안 B 가 쉬는 날은 6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35 일,
이 중에 A 가 쉬는 날은 20, 35 일
따라서 180 일 동안 두 사람이 함께 쉬는 날은
 $2 \times 5 = 10$ (일) 이다.

5. 고속버스 터미널에서 대전행 버스는 10 분마다 한 대씩, 광주행 버스는 15 분마다, 여수행 버스는 18 분마다 한 대씩 출발한다. 세 버스가 오전 9 시에 동시에 출발했을 때, 바로 다음으로 동시에 출발하는 시각은?

① 오전 9 시 30 분

② 오전 10 시

③ 오전 10 시 30 분

④ 오후 9 시

⑤ 오후 9 시 30 분

해설

10, 15, 18 의 최소공배수를 구한다.

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 10 \quad 15 \quad 18} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 2 \quad 3 \quad 18} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) \quad 1 \quad 3 \quad 9} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

$$\therefore 5 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 3 = 90$$

따라서 오전 9 시부터 90 분 후인 오전 10 시 30 분에 동시에 출발한다.

6. 어느 역에서 버스는 12 분마다, 전철은 18 분마다 출발한다고 한다. 역에서 버스와 전철이 동시에 출발하였다면 다음에 동시에 출발하는 것은 몇 분 후인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

12 와 18 의 최소공배수는 36 이므로, 다음에 동시에 출발하는 것은 36 분 후이다.

7. 어떤 역에는 각각 30분, 18분, 45분 간격으로 출발하는 세 종류의 열차가 있다. 오전 7시에 세 열차가 동시에 출발하였을 때, 오후 7시까지 몇 번 더 동시에 출발하는지 구하여라.

▶ 답: 번

▷ 정답: 8번

해설

30, 18, 45의 최소공배수는 90이므로, 세 열차는 90분마다 동시에 출발한다.

$$12 \times 60 \div 90 = 8(\text{번})$$

오전 7시에 동시에 출발하고 오후 7시까지 8번 더 동시에 출발한다.

8. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로, (a, b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 $(0, 5), (5, 0), (1, 2), (2, 1)$ 이다.

i) $(a, b) = (0, 5)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.

ii) $(a, b) = (5, 0)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.

iii) $(a, b) = (1, 2)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.

iv) $(a, b) = (2, 1)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

9. 두 자연수 a, b 에 대하여 $2 \times 5^a \times 11^b$ 의 약수가 12 개일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(1 + 1) \times (a + 1) \times (b + 1) = 12$$

$$(a + 1) \times (b + 1) = 6$$

$$a + 1 = 2, b + 1 = 3 \text{ 또는 } a + 1 = 3, b + 1 = 2$$

$$a = 1, b = 2 \text{ 또는 } a = 2, b = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

10. 약수의 개수가 36 개이고, $2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인가? (단, x, y, z 는 자연수)

- ① 3 개 ② 6 개 ③ 9 개 ④ 12 개 ⑤ 15 개

해설

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로

$(x, y, z) = (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$ 으로 3 개이다.

11. 두 자연수 x, y 에 대하여 $2^x \times 3 \times 5^y$ 의 약수의 개수가 36일 때, $x + y$ 의 값으로 알맞은 것을 모두 구하면?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

⑤ 13

해설

$$(x+1) \times (1+1) \times (y+1) = 36$$

$$(x+1) \times (y+1) = 18$$

$$18 = 2 \times 9 \text{ 또는 } 18 = 3 \times 6 \text{ 이므로}$$

$$x+1=2, y+1=9 \text{ 또는 } x+1=9, y+1=2 \text{ 일 때,}$$

$$x=1, y=8 \text{ 또는 } x=8, y=1$$

$$\text{그러므로 } x+y=9$$

$$x+1=3, y+1=6 \text{ 또는 } x+1=6, y+1=3 \text{ 일 때,}$$

$$x=2, y=5 \text{ 또는 } x=5, y=2$$

$$\text{그러므로 } x+y=7$$