

1. 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 2$ 이고 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 + ax + 6$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 0

② 1

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

최대공약수 $G = x + 2$

최소공배수는 G 를 인수로 가지므로

$x = -2$ 를 최소공배수에 대입하면 0이 된다.

$$x^3 + 2x^2 + ax + 6$$

$$= (-2)^3 + 2(-2)^2 + a(-2) + 6$$

$$= -8 + 8 - 2a + 6$$

$$= -2a + 6 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

2. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$ 을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots\textcircled{1}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$$

$$\therefore m=99, k=-1 \text{ 이므로 } m+k=98$$

3. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,
 $\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소)이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

4. a, b, c 가 $\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$ 을 만족하는 삼각형의 모양은?
- ① 직삼각형
 - ② 이등변삼각형
 - ③ 직각삼각형
 - ④ 직각이등변삼각형
 - ⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 &= 0 \\ a^2(a + b) - b^2(a + b) - c(a^2 - b^2) &= 0 \\ (a + b)(a^2 - ac + bc - b^2) &= 0 \\ (a + b)\{((a - b)(a + b) - c(a - b))\} &= 0 \\ (a + b)(a - b)(a + b - c) &= 0 \\ a + b > 0, a + b - c > 0 \text{ 이므로 } a &= b \\ \therefore a = b \text{ 인 이등변삼각형} \end{aligned}$$

5. x^8 을 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$ 이고, $q_1(x)$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$ 일 때, $\frac{r_2}{r_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 16 ④ 21 ⑤ 64

해설

$$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \dots\dots\dots ①$$

$$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \dots\dots\dots ②$$

①에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$\sqrt{r_1} = 2^8, \quad r_1 = 2^{16}$$

$$\begin{aligned} \text{또, } q_1(x) &= \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2} \\ &= (x^7 + 2x^6 + \dots + 2^7) \end{aligned}$$

②에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$q_1(2) = \sqrt{r_2}, \quad r_2 = (q_1(2))^2$$

$$\text{그런데 } q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$$

$$\therefore r_2 = 2^{20}$$

$$\text{따라서, } \frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$$