1. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a,\ b$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

2. 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2+3x+1$　　② x^2+3x+1　　③ $2x^2+3x+2$

④ x^3+3x-2　　⑤ x^2-x+1

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$

∴두 다항식은 $(x+1)(x-1)$, $(x+1)(x+2)$ 이다.

∴두 다항식의 합은 $2x^2+3x+1$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$

④ $1+\sqrt{2}$　⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$

$a+b=-m,\ ab=6$

$|a-b|=1$

$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$

$=m^2-24=1$

$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

4. 함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최솟값이 -3 일 때, 상수 a 의 값을 정하고, 함수 $y = ax^2 - 2x + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$　② 최댓값 $\frac{3}{2}$　③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$
④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$　⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$y = (x-1)^2 + a - 1$ 이므로
$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.
$a - 1 = -3 \quad \therefore\ a = -2$
$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$
$\quad = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
따라서 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$

5. 다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 골라라.

㉠ $\begin{cases} 2x+3 \geq x+8 \\ 3x+1 \leq x+7 \end{cases}$

㉡ $\begin{cases} -2(x+3) \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

㉢ $\begin{cases} 3(2x+9) \geq 5(x+5)+4 \\ x+3 \geq 3(x-\frac{1}{3}) \end{cases}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $\begin{cases} 2x+3 \geq x+8 \\ 3x+1 \leq x+7 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$ → 해가 없다.

㉡ $\begin{cases} -2(x+3) \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

$\to \begin{cases} -2x-6 \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x \geq 7 \\ x > 6 \end{cases} \to x \geq 7$

㉢ $\begin{cases} 3(2x+9) \geq 5(x+5)+4 \\ x+3 \geq 3(x-\frac{1}{3}) \end{cases}$

$\to \begin{cases} 6x+27 \geq 5x+25+4 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \to x = 2$

따라서 해가 없는 연립부등식은 ㉠이다.

6. 직선 l 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l의 방정식은?

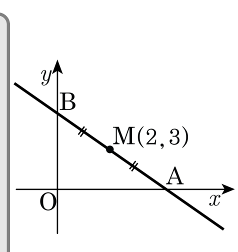
① $y=-2x+2$ ② $y=-\frac{3}{2}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+2$

④ $y=-\frac{3}{2}x+6$ ⑤ $y=\frac{2}{3}x+6$

해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로
A(4, 0), B(0, 6) 직선 l의 x절편이 4 , y 절편이 6 이므로
직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+1$이다.

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+6$



7. 원점을 지나고, 점$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 2 인 직선의 기울기 m 의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

해설

점$P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

원점을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$mx-y=0$

또한, 점$(2,\ 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가 2이므로,

$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ \ |2m-1|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2-4m+1=4m^2+4,$

$-4m=3\ \therefore\ \ m=-\frac{3}{4}$

8. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$d = \dfrac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{17}{5}$

이때, $\dfrac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

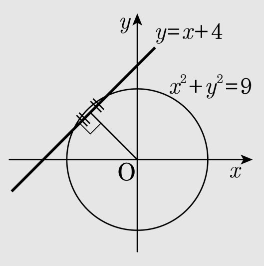
9. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

10. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0\ \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

11. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변삼각형
② $\angle A = 90°$인 직각삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ $\angle C = 90°$인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$
$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$
$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$
$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$
a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$
$\therefore \angle C = 90°$인 직각삼각형

12. x의 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$　② $q > \frac{1}{2}$　③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$　⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha + 2\alpha = 3p \;\; \therefore \; \alpha = p$
$\alpha \cdot 2\alpha = 4q-2 \;\; \therefore \; \alpha^2 = 2q-1$
따라서 $p^2 = 2q-1$
한편 $\mathrm{D} > 0$에서 $9p^2 - 4(4q-2) > 0$
$9(2q-1) - 16q + 8 > 0$
$2q - 1 > 0$
$\therefore \; q > \frac{1}{2}$

13. x, y에 관한 연립방정식

$\begin{cases} kx+(1-k)y=2k+1 \\ akx+(k+1)y=b+4k \end{cases}$ 가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$kx+(1-k)y=2k+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$akx+(k+1)y=b+4k \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $(x-y-2)k+(y-1)=0$
$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$
$\therefore\ x=3,\ y=1 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면
$(3a-3)k+(1-b)=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

14. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$

따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

15. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{7}$

해설

(ⅰ) $x < -\frac{3x-a}{4}$, $4x < -3x+a$

$\therefore\ x < \frac{a}{7}$

(ⅱ) $-\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$, $-3x < 2-a$

$\therefore\ x > \frac{a-2}{3}$

$\therefore\ \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$

$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}$, $a = 1$

$\frac{a}{7} = b$, $b = \frac{1}{7}$

$\therefore\ ab = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

16. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x]-1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

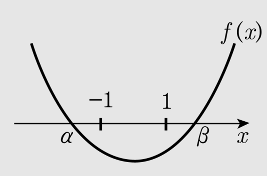
$\therefore 1 \le x < 5$

17. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p의 값의 범위는 ?

① $p>-2$　② $p>-1$　③ $p<-2$
④ $p<-1$　⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0$ $\therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0$ $\therefore p<-\frac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

18. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $D>0$에서 $\frac{D}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

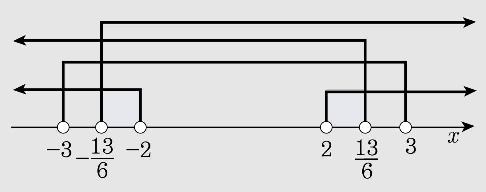
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

19. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

20. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa　　② $\sqrt{2}\pi a$　　③ $2\pi a$

④ $2\sqrt{2}\pi a$　　⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.
4개의 반원의 길이의 합이므로
$2\times\left(2\pi\frac{a}{2}\right)=4\pi\left(\frac{a}{2}\right)=2\pi a$