1. x^3-4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12　② -10　③ 0　④ 10　⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x^2+2x+1 & x^3-4x^2+\quad ax+b \\ - & x^3+2x^2+\quad x \\ \hline & \quad -6x^2+(a-1)x+b \\ - & \quad -6x^2-\quad 12x-6 \\ \hline & \qquad (a+11)x+b+6 \end{array}$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

x^3-4x^2+ax+b

$=(x+1)^2(x+k)+7$

$=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k+7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

2. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$을 ㉡에 대입하면,
$(k-1)(k+1) = k^2 + 2k + 3$
$\therefore\ k = -2$

3. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k 의 개수는?

① 5 개　　② 6 개　　③ 7 개　　④ 8 개　　⑤ 9 개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, \quad (k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore \; k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0, \quad k(k+8) < 0$
$\therefore \; -8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k 는 $-7, \; -6, \; \cdots, -2, \; -1$ 의 7 개이다.

4. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 7

해설

$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x-1)^2 + k + 5$

$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로

$k + 5 = 0 \quad \therefore k = -5$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+a) \le 6 \\ 3b \le 3x-3 \end{cases}$ 의 해가 $-1 \le x \le 2$일 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

주어진 식을 정리하면

$\begin{cases} x \le 3-a \\ b+1 \le x \end{cases}$

$\therefore\ b+1 \le x \le 3-a$

$b+1=-1,\ 3-a=2$

$\therefore\ b=-2,\ a=1$

$\therefore\ a+b=-1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} -\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \le -2.5 \\ ax+4 \ge x \end{cases}$ 의 해가 $x = 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$-\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \le -2.5$

$x+\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{5}{2}$

$x \ge 2$

해가 $x = 2$이기 위해서는 다음 부등식의 해는 $x \le 2$ 이어야 하므로

$ax+4 \ge x$

$(a-1)x \ge -4$

$x \le \dfrac{-4}{a-1}$

$\dfrac{-4}{a-1} = 2$

$-4 = 2a-2$

$-2a = 2$

$\therefore\ a = -1$

7. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x - 8 < 5x + 2 \\ 2x - 3 \le x + a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \le -8$

해설

$3x - 5x < 2 + 8$
$-2x < 10$에서
$x > -5$
$2x - x \le a + 3$에서
$x \le a + 3$
$a + 3 \le -5$이어야 해가 없다.
$\therefore\ a \le -8$

8. 지수는 이번 기말고사에 국어, 영어, 과학, 수학 4 과목을 시험을 치루었다. 지금까지의 국어, 영어, 과학 성적이 각각 88 점, 79 점, 97 점일 때, 수학성적까지의 평균이 88 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 수학시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는가? (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : ________ 점

▷ 정답 : 88 점

해설

$$88 \le \frac{88+79+97+x}{4} \le 91$$

$$88 \times 4 \le 88+79+97+x \le 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 352 \le 264 + x \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \le 264 - 352 \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 88 \\ x \le 100 \end{cases}$$

$$\therefore\ 88 \le x \le 100$$

9. 부등식 $|x-1|+|x+2|<5$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 1

해설

$|x-1|+|x+2|<5$에서

i) $x<-2$일 때,

$-(x-1)-(x+2)<5 \ \therefore \ -2x<6 \ \therefore \ x>-3$

곧, $x<-2$일 때, $x>-3$

$\therefore \ -3<x<-2 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

ii) $-2 \le x < 1$일 때,

$-(x-1)+(x+2)<5 \quad \therefore \ -0 \cdot x < 2$

이 부등식은 항상 성립하므로

$-2 \le x < 1 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

iii) $x \ge 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)<5 \quad \therefore \ 2x<4 \quad \therefore \ x<2$

곧, $x \ge 1$일 때, $x<2$

$\therefore 1 \le x < 2 \cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 $-3<x<2$이므로

$a=-3, \ b=2$

$\therefore a+b=-1$

10. 점 $(0, 2)$를 지나고, 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0, 2)$를
지나는 접선은 $y=mx+2$
원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $y=mx+2$까지의
거리는 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$
$\therefore m=\sqrt{3}\ (\because m>0\ )$

11. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, x^5+y^5의 값을 구하면?

① 12 ② 32 ③ 52 ④ 82 ⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\therefore\ 14=8-6xy$
$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①
$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③
①, ②, ③을 $(*)$에 대입하면
$x^5+y^5=6\times14-2=82$

12. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192　② 193　③ 194　④ 195　⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times11\times3+2\times3^2)(11^2+2\times11\times3+2\times3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

13. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0$ $\therefore$ $-7 < k < 5$

$\therefore$ $\alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

14. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$
$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$
$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$
$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$
$\therefore\ -5\leq y\leq 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

15. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
② $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
③ $x=\frac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
④ $x=\frac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2 으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\frac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

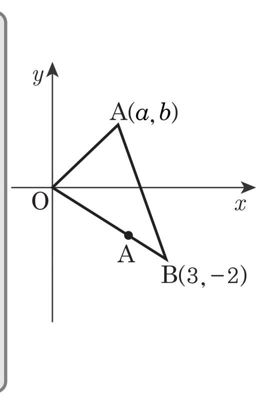
$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

16. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(3, −2) 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

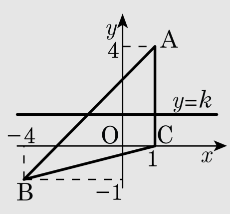
$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\text{OA}}$ 의 길이이고
$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\text{AB}}$ 의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AB}}=\overline{\text{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AB}}$ 의 최솟값은
$\overline{\text{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 이다.



17. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$ ② $4-\sqrt{6}$ ③ $4-\sqrt{7}$
④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow \quad y=x+3$

$\therefore \quad y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k),\ (1,\ k)$

$\Rightarrow$이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore \ k=4-\sqrt{10}\ (\because\ k<4)$

18. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3\ :\ 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\overline{AP}\ :\ \overline{BP} = 3\ :\ 1$ 이므로

$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$

$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$

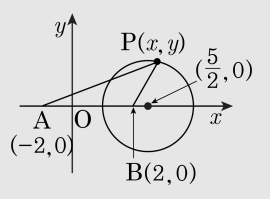
$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$

$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$

$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

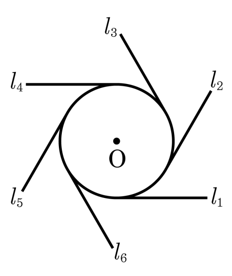
즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

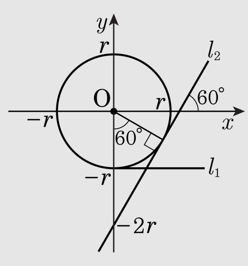
19. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계 도를 그리고 있다. l_1, l_2, $\cdots$, l_6 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배

④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설



그림에서 $l_1 : y = -r$라 놓으면

$l_2 :\ y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

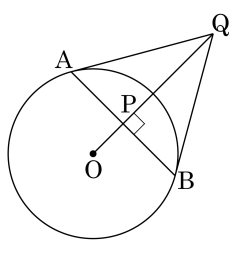
원의 반지름이 $\cos 30° = \frac{r}{x}$ 이므로

$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

20. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

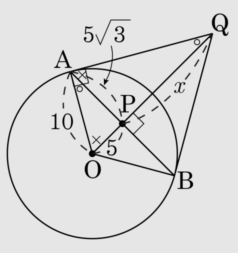


▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$

$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$