1. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$(가)
(가)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$ 의 9개이다.

2. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8|\le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8|\le 8$을 풀면

$-8\le x^2-8\le 8$

$0\le x^2\le 16$

$\therefore -4\le x\le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k<x-2<k$

$-k+2<x<k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8|\le 8$을 만족하려면

$-k+2\ge -4,\ k+2\le 4$이어야 하므로

$k\le 6,\ k\le 2$

$\therefore 0<k\le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

3. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $-1 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

4. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ \ -1<x<2$

5. 이차부등식 $x^2 - |x| - 6 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

① 5 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x \geqq 0$일 때

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x+2)(x-3) < 0$

$-2 < x < 3$ $\quad\therefore 0 \leqq x < 3$

$x < 0$일 때

$x^2 + x - 6 < 0$에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$-3 < x < 2$ $\quad\therefore -3 < x < 0$

$\therefore -3 < x < 3$이므로 $a = -3,\ b = 3$

따라서 $a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$

6. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
$\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$이므로

$$x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$$

따라서, $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$

$$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

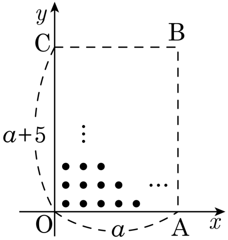
해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$

$\therefore\ f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$

$$\therefore\ \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

7. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(a-1)(a+4) \leq 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 6$

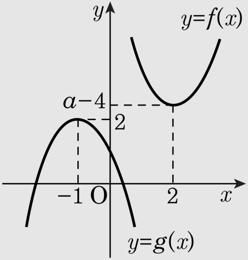
8. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$　② $a > 5$　③ $a > 4$　④ $a > 3$　⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로



$a - 4 > 2$　$\therefore\ a > 6$

9. 세 변의 길이가 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1$, x, $x+1$은 삼각형의 세 변이므로
$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$
$x-1+x>x+1$ $\therefore x>2 \cdots\cdots$ ①
한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$
$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$ ②
①과 ②에서 $2<x<4$
$\therefore\ a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$