1. 16 의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2,\ 2$

해설

16 의 네제곱근은
$x^4 = 16$ 를 만족하는 x 의 값이므로
$x^4 - 16 = 0$ 에서
$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
$\therefore x = -2,\ 2,\ 2i,\ -2i$
따라서 16 의 네제곱근 중 실수인 것은
$-2,\ 2$

2. $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt[5]{128}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt[5]{512}$

해설

$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$

3. $a>0, b>0$일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$$
$$= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}$$
$$= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

4. $\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② 1 ③ $\sqrt{5}$ ④ 5 ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (25)^{\frac{1}{2}} = 5$$

5. $3^x = 2$ 일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(\frac{1}{9})^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$

6. $\log_8 0.25 = x$를 만족하는 x의 값은?

① 1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

$\log_8 0.25 = x$에서 $8^x = 0.25$

$(2^3)^x = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $2^{3x} = 2^{-2}$

$\therefore$ $3x = -2$

$\therefore$ $x = -\frac{2}{3}$

7. $\log_2(x-5)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 2$ ② $x < 2$ ③ $x > 5$ ④ $x < 5$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$x - 5 > 0$ 로부터 $x > 5$

8. $\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 일 때, $\log_{ab} b$ 의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 에서

$$\frac{\log \sqrt{3}}{\log a} = \frac{\log 9}{\log b}, \quad \frac{\frac{1}{2}\log 3}{\log a} = \frac{2\log 3}{\log b}$$

$$\frac{\log b}{\log a} = 4$$

즉, $\log_a b = 4$

$$\therefore \quad \log_{\sqrt{ab}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}}$$

$$= \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a ab} = \frac{2\log_a b}{1+\log_a b} = \frac{8}{5}$$

9. $3^{2\log_3 4-3\log_3 2}$ 을 간단히 하면?

① $\log_3 2$ ② 1 ③ $2\log_3 2$

④ $\log_2 3$ ⑤ 2

해설

$$3^{2\log_3 4-3\log_3 2} = 3^{\log_3 16-\log_3 8}$$
$$= 3^{\log_3 2}$$
$$= 2^{\log_3 3} = 2$$

10. $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} y = 2$ 일 때, $\log_x y$ 의 값은?

① -4 ② -1 ③ $\frac{1}{4}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$\log_{\frac{1}{2}} y = -\log_2 y = 2$ 이므로

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

11. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt[3]{-0.027} = -3$

② $\sqrt{\sqrt[3]{81}} = 3$

③ $(\sqrt[6]{9})^3 = 3$

④ $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{81} = 3$

⑤ $\sqrt[4]{81} \div \sqrt[4]{27} = 3$

해설

① 0.3

② $3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$

③ $\left\{(3^2)^{\frac{1}{6}}\right\}^3 = 3^{2\times\frac{1}{6}\times 3} = 3$

④ $3^{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}} = 3^{\frac{6}{5}}$

⑤ $3^1 \div 3^{\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

12. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$ 이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$$

$$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

13. $(3-\sqrt{2})^{-1} \times (11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$a = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$

$$= \frac{1}{(3-\sqrt{2}) \times (3+\sqrt{2})} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{7}$$

14. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

15. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$이 정의되기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

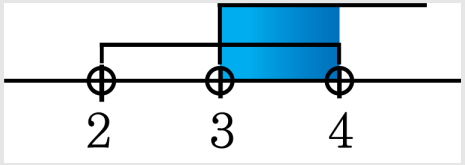
$x-3 \neq 1,\ x-3 > 0,$

$-x^2+6x-8 > 0$이므로

$x \neq 4,\ x > 3$

$x^2-6x+8 < 0$

$2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

16. $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$ 일 때, $|x-1| + |x-2|$를 간단히 하면?

① 3
② $2x$
③ $2-3x$ 또는 $3x-2$
④ $3-2x$
⑤ $2x-3$

해설

$x-1>0,\ x-2>0$ 이므로

$|x-1| + |x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$

17. $5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$5^{\log_5 2+3\log_5 3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 2+\log_5 3^3-\log_5 6}$

$= 5^{\log_5 \frac{2\times 3^3}{6}} = 5^{\log_5 3^2} = 9$

18. $\log_3 10$의 소수부분을 α라 할 때, 3^{α}의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$

이 된다.

따라서 $3^{\alpha} = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$이다.

19. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ b = \log_5 3$

$$\log_6 72 = \frac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a+2b}{a+b}$$

20. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a,\ \log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

21. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $a+a^{-1}$의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$

$a+a^{-1}+2=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

22. $\log_2 12 = a$ 일 때, $\log_3 6$ 을 a 로 나타내면?

① $\dfrac{a-1}{a-2}$ ② $\dfrac{a}{a-2}$ ③ $\dfrac{a}{a-1}$ ④ $\dfrac{a+1}{a-1}$ ⑤ $\dfrac{a+2}{a}$

해설

$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

즉, $2 + \log_2 3 = a$ 이므로 $\log_2 3 = a - 2$

$\therefore \quad \log_3 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2(2 \times 3)}{\log_2 3}$

$= \dfrac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \dfrac{1 + (a-2)}{a-2} = \dfrac{a-1}{a-2}$

23. $2^x = a,\ 2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3b^2$ 을 $x,\ y$ 로 나타내면?

① $\dfrac{3x+2y}{1+x+y}$ ② $\dfrac{2x+3y}{2+x+y}$ ③ $\dfrac{2+x+y}{3x+2y}$

④ $\dfrac{x^2y^2}{4xy}$ ⑤ $\dfrac{4xy}{x^3y^2}$

해설

$2^x = a,\ 2^y = b$ 이므로

$\log_{2ab} a^3b^3 = \log_{2\cdot 2^x\cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$

$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$

$= \dfrac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \dfrac{3x+2y}{1+x+y}$

24. 방정식 $2x^2-8x-1=0$의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① -2 ② -8 ③ -12 ④ -26 ⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=4$,

$\log_{10} a\cdot\log_{10} b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$=\frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a\cdot\log_{10} b}{\log_{10} a\cdot\log_{10} b}$

$=\frac{16+1}{-\frac{1}{2}}=-34$

25. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$

② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$

③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$

④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$

⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$3\log_3 3 = 3$

$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \quad \therefore \ 1 < \log_2 3 < 2$

$2\log_2 4 = 4$

$\therefore \ \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$

26. 다음 네 수의 크기를 비교하면?

㉠ $\sqrt{2}$	㉡ $\sqrt{3}$	㉢ $\sqrt[3]{4}$	㉣ $\sqrt[4]{5}$

① ㉠ < ㉡ < ㉢ < ㉣

② ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡

③ ㉣ < ㉢ < ㉡ < ㉠

④ ㉠ < ㉣ < ㉢ < ㉡

⑤ ㉡ < ㉠ < ㉢ < ㉣

해설

㉠ < ㉡

$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} > (\sqrt[3]{4})^3 = 4$

$\therefore$ ㉢ < ㉠ < ㉡

$(\sqrt[3]{4})^{12} = 4^4 = 256 > (\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

$\therefore$ ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡

27. $2^x = 3^y = 5^z$ 이 성립할 때, $5^{\frac{z}{x}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 10 ⑤ 20

해설

$2^x = 3^y = 5^z$ 에서

$2 = 5^{\frac{z}{x}},\ 3 = 2^{\frac{x}{y}},\ 5 = 3^{\frac{y}{z}}$

$\therefore 5^{\frac{z}{x}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}} = 2 + 3 + 5 = 10$

28. $\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log\left(1-\frac{1}{9}\right)+\log\left(1-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\log\left(1-\frac{1}{64}\right)$을 간단히 하면?

① $2\log 3-4\log 2$ ② $3\log 2-2\log 3$

③ $3\log 3-4\log 2$ ④ $4\log 2-3\log 3$

⑤ $4\log 3-2\log 2$

해설

$1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \log\frac{1\cdot 3}{2^2}\times\frac{2\cdot 4}{3^2}\times\cdots\times\frac{7\cdot 9}{8^2}\\ &= \log\frac{1}{2}\times\frac{9}{8}=\log\frac{9}{16}\\ &= \log 9-\log 16\\ &= 2\log 3-4\log 2\end{aligned}$$