1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$

② x는 모든 실수

③ $x \ne 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$

$(x-3)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 3$

2. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \le 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \le k \le 0$
② $-2 < k < 0$
③ $0 \le x \le 2$
④ $0 < k < 2$
⑤ $k < 0$, 또는$k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k-2) < 0$
$\therefore 0 < k < 2$

3. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$

② $-7<x<-5$

③ $-7<x<5$

④ $5<x<7$

⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$(가)

(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

4. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

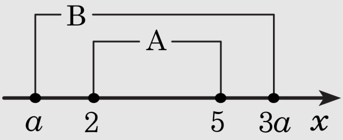
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

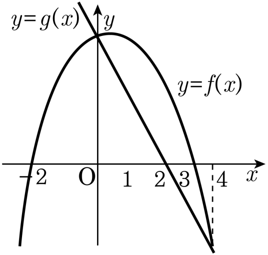
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

6. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

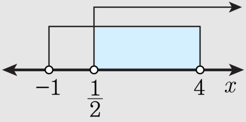
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ $\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \dfrac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

7. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

8. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

9. 부등식 $3x^2 \geq 2|x-1|+3$의 해가 $x \leq \alpha$ 또는 $x \geq \beta$일 때, $3\alpha+\beta$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

(i) $x<1$일 때,

$3x^2 \geq -2(x-1)+3,\ 3x^2+2x-5 \geq 0$

$(x-1)(3x+5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $x<1$이므로 $x \leq -\frac{5}{3}$

(ii) $x \geq 1$일 때,

$3x^2 \geq 2(x-1)+3,\ 3x^2-2x-1 \geq 0$

$(x-1)(3x+1) \geq 0 \therefore x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x \geq 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$

따라서 $\alpha=-\frac{5}{3},\ \beta=1$이므로 $3\alpha+\beta=-4$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2　　② -2　　③ 4　　④ -4　　⑤ 0

해설

$f(x)=0 \iff x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \iff 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\iff x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$$\therefore\ \frac{\alpha+2}{4}+\frac{\beta+2}{4}=\frac{\alpha+\beta+4}{4}=\frac{8}{4}=2$$

11. 이차방정식 $x^2-(2k+4)x+2k^2+9=0$이 실근을 갖도록 k의 값 또는 범위를 정하면?

① $k<2$

② $k\leq 2$

③ $k=2$를 제외한 모든 실수

④ $-4\leq k\leq 5$

⑤ k의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$(k+2)^2-(2k^2+9)\geq 0$

$k^2-4k+5\leq 0$

그런데 $k^2-4k+5=(k-2)^2+1>0$

$\therefore$ k의 값은 존재하지 않는다

12. 평지의 공원에 둘레의 길이는 200 m로 일정하고 넓이는 900 m^2 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① 40 m　② 50 m　③ 90 m　④ 100 m　⑤ 150 m

해설

화단의 가로 길이를 x m라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)$ m이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100 \cdots$ ㈎
900 m^2 이상이므로
$x(100-x) \geq 900$
$x^2-100x+900 \leq 0, (x-10)(x-90) \leq 0$
$\therefore 10 \leq x \leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 90 m이다.

13. 두 함수 $f(x) = mx^2 - 4x + 4$, $g(x) = -2x^2 + 2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) < y < f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3 < m < 0$ ② $-2 < m \le 3$ ③ $0 \le m < 2$

④ $-2 \le m < 2$ ⑤ $-2 < m \le 4$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - g(x) > 0$ 을 만족시키는 조건을 구한다.

$f(x) - g(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$

(i) $m + 2 = 0$ 이면 $f(x) - g(x) = 4 > 0$

따라서 $m = -2$ 일 때, 성립한다.

(ii) $m + 2 > 0$, $\dfrac{D}{4} < 0$ 에서

$-2 < m < 2$

(i), (ii) 에서 $-2 \le m < 2$

14. 부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되어야하므로

$0 \le x \le 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \le x \le 2$ 에서

$f(x) \le 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서

$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

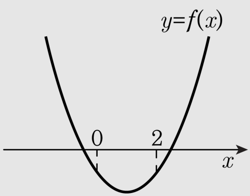
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서

$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$



15. n, $n+5$, $n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 7

④ 9 ⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서

$n+(n+5)>n+8,\ n>3 \cdots\cdots$ ㉠

둔각삼각형일 조건에서 $n^2+(n+5)^2<(n+8)^2$

$n^2-6n-39<0$, $3-\sqrt{48}<n<3+\sqrt{48} \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 자연수인 n 은

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (6 개)