1. 다음 중 항상 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

2. 명제 '$p(x)$이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P$ ③ $P \subset Q^c$

④ $P \cup Q = P$ ⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

3. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40

④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

4. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$가 성립한다. $a > 1$일 때, a, b, c의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < c < a$

④ $c < a < b$ ⑤ $c < b < a$

해설

$3a - b + c = 2 \cdots\cdots ①$

$a + b + c = 4 \cdots\cdots ②$

① + ② 하면 $4a + 2c = 6$

$2a + c = 3$, $a > 1$이므로

$c = 3 - 2a$에서 $c < 1$

① − ② 하면 $2a - 2b = -2$

$\therefore a - b = -1,\ b = a + 1$이므로

$a > 1$이므로 $b > a$

$\therefore c < a < b$

5. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$　　② $xy>0$　　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

6. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

7. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \dfrac{1}{2}$일 때 성립)

8. p : $|x-1| \le h$, q : $|x+2| \le 7$ 에 대하여 'p 이면 q 이다' 가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \ge 0$)

① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
$|x-1| \le h$ 에서 $-h \le x-1 \le h$ 이므로
$-h+1 \le x \le h+1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
$|x+2| \le 7$ 에서 $-7 \le x+2 \le 7$ 이므로
$-9 \le x \le 5$
$P \subset Q$ 이어야 하므로
$-h+1 \ge -9$ 에서
$h \le 10$
$h+1 \le 5$ 에서 $h \le 4$
따라서 $0 \le h \le 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

9. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

'역'의 대우인 '이'가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x=2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x=5$
③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

10. 명제 $\sim p \rightarrow q$와 $r \rightarrow \sim p$가 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① $\sim q \rightarrow p$　　② $\sim q \rightarrow \sim r$　　③ $p \rightarrow \sim r$

④ $r \rightarrow q$　　⑤ $q \rightarrow r$

해설

$\sim p \rightarrow q$ (T) 그의 대우 $\sim q \rightarrow p$ (T), $r \rightarrow \sim p$ (T) 그의 대우 $p \rightarrow \sim r$ (T) 또한 $r \rightarrow \sim p$, $\sim p \rightarrow q$ 이므로, $r \rightarrow q$ (T) 그의 대우 $\sim q \rightarrow \sim r$ (T)

11. 선영, 나영, 해영은 세 자매이다. 세 사람은 자신들을 소개하는 자리에서 다음과 같이 말하였다.

선영 : 나는 둘째이다. 나영 : 나는 둘째가 아니다. 해영 : 나는 셋째가 아니다.

위의 세 명의 말 중 하나만 참일 때, 첫째, 둘째, 셋째를 차례로 나타낸 것은?

① 선영, 해영, 나영
② 해영, 나영, 선영
③ 해영, 선영, 나영
④ 나영, 해영, 선영
⑤ 나영, 선영, 해영

해설

선영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 둘이 되므로 모순
나영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 없으므로 모순
해영이의 말이 진실이라고 가정하면 해영은 셋째가 아닌데 나영이가 둘째이므로 해영이가 첫째 선영이는 둘째가 아니므로 선영이가 셋째가 되어 모순이 없다.
∴ 해영이가 진실을 말하고 있으며, 해영이가 첫째, 나영이는 둘째, 선영이는 셋째이다.

12. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
$q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
$r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$
$\therefore q \rightarrow p$ $\{p$ 는 q이기위한필요조건$\}$
q 는 p이기위한충분조건
$q \rightarrow r$ $\{p$ 는 r이기위한필요조건$\}$
r 은 p 이기 위한 충분조건

13. x, y가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$

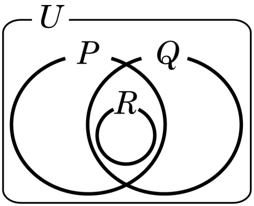
④ $xy < 0$ ⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

14. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q)$, $R \subset (P \cap Q)$ 이므로

① r는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ r는 p이고 q이기 위한 충분조건이다.

15. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13　② 24　③ 25　④ 28　⑤ 36

해설

$a > 0,\ b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b)\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{4b}{a}} = 2\cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$