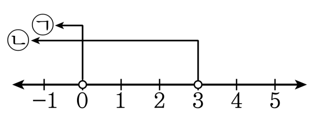
1. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x<0$

해설

$x<0$ 과 $x<3$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<0$

2. 부등식 $4 - x \le 3x - 4 < 2x + 2$ 를 풀면?

① $x \le 2$　　② $x \ge 2$　　③ $2 \le x < 6$
④ $x \le 6$　　⑤ $x \ge 6$

해설

$4 - x \le 3x - 4 < 2x + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 - x \le 3x - 4 \\ 3x - 4 < 2x + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x - 3x \le -4 - 4 \\ 3x - 2x < 2 + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x \le -8 \\ x < 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$

$\therefore\ 2 \le x < 6$

3. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x + 4 > 5x$

$\therefore\ x > -2$

$15 - x > a$

$\therefore\ x < 15 - a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8 < 15 - a \le 9$

$6 \le a < 7$

$\therefore\ a = 6$

4. 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 1$ 또는 $x > 2$
⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x-1| \geq 3$에서
$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

5. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$
$\quad = -4x + (x^2-4)i$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

6. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2) + 2ai = 2i$

복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$

$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i)\\ &= 1-(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

7. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$ 가 -3 이므로 $-3 + 5 = 2$

8. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

9. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$
$\therefore\ k=3$

10. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \leq x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5 개

해설

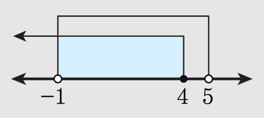
㉠ $2x \leq x+4$,

$\therefore x \leq 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\leq 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

12. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$　　② $a \geq 4$　　③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$　　⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면
$x^2 - kx + (2k-a) = 0$
실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.
$k^2 - 4(2k-a) \geq 0$
$k^2 - 8k + 4a \geq 0$
위 부등식을 k에 대하여 정리하면
$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$
실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$이거나,
$4a - 16 \geq 0(\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.
따라서 $a \geq 4$

14. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이다. $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ -1　④ -2　⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+\frac{3}{1}=6$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=1+2+1=4$$

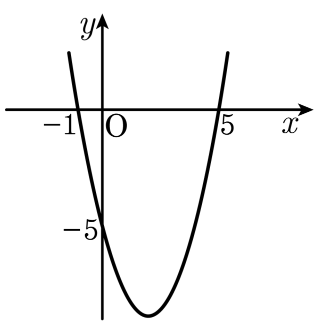
$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식은

$x^2-6x+4=0$

$\therefore\ a=-6,\ b=4$

$\therefore\ a+b=-2$

15. 다음 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$y=ax^2+bx+c$ 에서 x 절편이 $-1, 5$ 이므로 $y=a(x+1)(x-5)$ 이다.
y 절편이 -5 이므로 $a=1$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(x-5) \\ &= x^2-4x-5 \\ &= (x-2)^2-9 \end{aligned}$$

따라서 (최솟값) $=-9$ 이다.

16. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 $x = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖고 한 점 $(3,\ 7)$ 을 지날 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

꼭짓점이 $(1,\ -1)$ 이므로
$y = a(x-1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$
$(3,\ 7)$ 을 대입하면
$7 = 9a - 6a + a - 1$
$a = 2$, $b = -4,\ c = 1$
$\therefore\ a + b + c = 2 + (-4) + 1 = -1$

17. 실수 x, y가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(-2x+4)^2 \\ &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

18. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$

$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

19. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면
$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots$ ㉠
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots$ ㉡
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots$ ㉢
㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면
$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$
$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$의 값을 a, b라 할 때, $a - b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ $(3x - y)(2x - 3y) = 0$
$\therefore\ 3x = y\ \ or\ \ 2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7$ $x = 1(x > 0)$, $\quad y = 3$
$\therefore\ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28$, $\ y^2 = 4$, $y = 2(y > 0)$, $x = 3$
$\therefore\ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore\ a - b = 1$

21. 방정식 $2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2　② 3　③ 4　④ 8　⑤ 10

해설

$2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-8x+16)=0,$

$(x-2y)^2+(x-4)^2=0$

$x=2y, x=4$

$\therefore\ x=4, y=2 \quad \therefore\ xy=8$

22. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$ ② $1 \le k \le 5$ ③ $k \le -1, k \le 5$
④ $k < 1, k > 5$ ⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

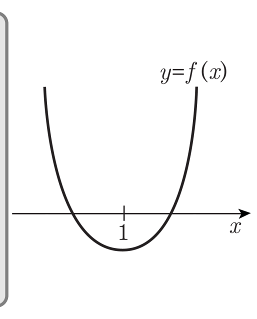
곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$
$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$
위의 부등식이 항상 만족해야 하므로
방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.
$D = (k-3)^2 - 4 < 0$
$k^2 - 6k + 5 < 0$
$\therefore\ 1 < k < 5$

23. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 1보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a>-1$　　② $a>-2$　　③ $a>-3$
④ $a>-4$　　⑤ $a>-5$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 한 근은 1 보다 크고
다른 한 근은 1 보다 작으므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
즉, $f(1)<0$ 이므로 $-a-3<0$
$\therefore a>-3$



24. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$　② $-\frac{3}{4}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}$, $\alpha\beta = -2$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

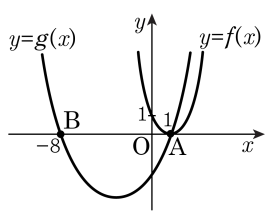
$$\therefore\ 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore\ \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9,\ 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

25. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?



① $x = 1$ ② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$ ④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로

$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

26. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0$ $\therefore\ -2 \leq a \leq 2$

그런데 α, β 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a^2 - 3$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$0 \leq a^2 \leq 4$

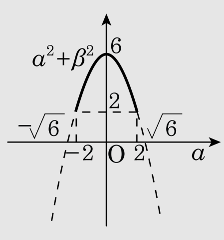
$\therefore\ 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$

$\therefore\ 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2



27. 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하였더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500 원씩 정가를 내릴 때마다 20 개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?

① 22500 원　　② 23000 원　　③ 23500 원

④ 24000 원　　⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 x 원이라 하면

팔리는 제품의 개수는

$$200 + \frac{10000 - x}{500} \times 20 = 600 - \frac{x}{25}$$

총 이윤을 p 라 하면

$$p = x\left(600 - \frac{x}{25}\right) = -\frac{x^2}{25} + 600x$$

$$= -\frac{1}{25}(x^2 - 15000x)$$

$$= -\frac{1}{25}(x - 7500)^2 + 2250000$$

따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,

최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는

$15000 + 7500 = 22500$(원)

28. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다

해설

$y=50t-5t^2$
$y=-5(t^2-10t+25-25)$
$=-5(t-5)^2+125$
따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

29. x에 대한 이차함수 $y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$의 값이 모든 실수 x에 대하여 항상 양이 되는 실수 a의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B 라 할 때, $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$는?

① $\{a \mid a<6\}$　② $\{a \mid a \le 6\}$　③ $\{a \mid 3<a<6\}$
④ $\{a \mid 3 \le a \le 6\}$　⑤ $\{a \mid a>3\}$

해설

$y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$이 이차함수이므로 $a \neq 3$
이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하자.
(i) 항상 양일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y>0$이려면 $a-3>0$,　즉 $a>3$이고
$\frac{\mathrm{D}}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$,　$(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore \mathrm{A}=\{a \mid 3<a<6\}$
(ii) 항상 음일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y<0$이려면 $a-3<0$, 즉 $a<3$ 이고
$\frac{\mathrm{D}}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$,　$(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore \mathrm{B}=\varnothing$
(i), (ii)에서 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{a \mid 3<a<6\}$

30. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x^2-(a+6)x+6a \le 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a 의 값의 범위는 $p < a \le q$이다. 이때, $p+q$의 값은?

① 5　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$\begin{cases} x^2-6x+8>0 \cdots ㉠ \\ x^2-(a+6)x+6a \le 0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠: $x>4, x<2$

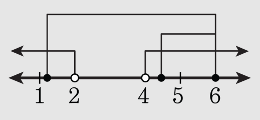
㉡: $(x-6)(x-a) \le 0$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이라면

㉡의 해는 $a \le x \le 6$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이 되도록

수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$1 < a \le 5$

$p+q=1+5=6$

31. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \le 7$　　② $-3 \le a < 7$

③ $-7 < a \le -3$　　④ $a \le 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $a < -7$ 또는 $a \ge -3$

해설

이차함수 $f(x)=x^2+2ax+6-a$의 그래프를 생각하면

$\frac{D}{4}=a^2-6+a \ge 0,\quad (a+3)(a-2) \ge 0$

$\therefore\ a \le -3,\ a \ge 2 \cdots$ ㉠

$f(1)=1+2a+6-a>0$

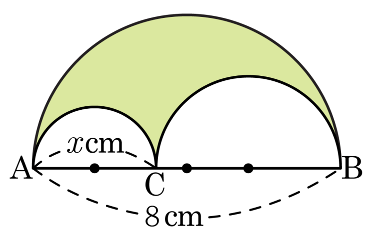
$\therefore\ a > -7 \cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x=-a$ 에서 $-a>1$

$\therefore\ a < -1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7 < a \le -3$

32. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8 - x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64 - 16x + x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2 - 16x + 64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

33. 어느 공장에서 생산하는 제품은 한 상자에 20 개의 제품이 들어 있고 한 상자 분량의 제품을 만드는데 드는 비용은 40000 원이고 한 상자마다 불량품이 일정하게 나타난다고 한다. 제품 한 개 당 가격은 2600 원이고 한 상자 당 원가의 10% ~ 15% 의 이익을 올리려고 한다면 한 상자마다 나타나는 불량품은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

$40000(1+0.10) \le$ (제품 한 상자의 가격) $\le 40000(1+0.15)$

즉 $44000 \le$ (제품 한 상자의 가격) ≤ 46000

이어야 하므로 불량품의 개수를 x 라 하면

$44000 \le (20-x) \times 2600 \le 46000$

$\therefore \frac{30}{13} \le x \le \frac{40}{13}$

따라서 불량품은 최대 3 개이다.