1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y-1)^2=5$
② $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$
③ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$
④ $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원
$\Rightarrow \ (x-2)^2+(y+1)^2=5$

2. 원 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$의 중심이 (a, b), 반지름의 길이가 r일 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y-3)^2=16$
따라서, 중심은 $(2, 3)$
반지름의 길이가 4 이므로
$a=2,\ b=3,\ r=4$
$\therefore\ a+b+r=9$

3. 좌표평면에서 $(-5,\ 0)$과 $(25,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. $(x,\ 15)$가 원 위의 점일 때, x는?

① 10　② 12.5　③ 15　④ 17.5　⑤ 20

해설

두 점 $(-5, 0)$과 $(25, 0)$의 중점 $(10, 0)$이 중심이고
반지름은 15인 원이므로
$(x-10)^2 + y^2 = 225$
$(x, 15)$가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,
$(x-10)^2 + 15^2 = 225 \quad \therefore\ x = 10$

4. 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2-4c=0$ ② $b^2+4c=0$

③ $a^2-4c=0$ ④ $a^2+b^2-4c=0$

⑤ $a^2+b^2+4c=0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 되므로
$y^2+by+c=0$ ⋯⋯ ㉠
원이 y 축과 접하려면 ㉠의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$
$\therefore\ D=b^2-4c=0$

5. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉠ $y = 2x + k \cdots$ ㉡ ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면 $5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots$ ㉢ ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면 $D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$ (가)0 k^2(나)5 $\quad \therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k = \pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

6. 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2+y^2-x+y-2=0$　② $x^2+y^2-2x+3y-4=0$

③ $x^2+y^2+x-4y-5=0$　④ $x^2+y^2+3x-y-1=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y-2=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$으로 놓으면
이 원이 세 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
$(-1)^2+(-1)^2+\mathrm{A}\cdot(-1)+\mathrm{B}\cdot(-1)+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}=2\cdots$ ㉠
$1^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 1+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2\cdots$ ㉡
$0^2+1^2+\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot 1+\mathrm{C}=0$
$\therefore \mathrm{B}+\mathrm{C}=-1\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$\mathrm{A}=-1,\ \mathrm{B}=1,\ \mathrm{C}=-2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-x+y-2=0$

7. 방정식 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k<-2$　② $k<-1$　③ $k>-2$
④ $k<2$　⑤ $k>1$

해설
방정식을 정리하면, $(x-1)^2+(y+1)^2=2-k$
원이 되려면 $2-k>0$ 을 만족해야 한다.
$\therefore\ k<2$

8. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

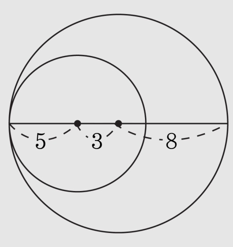
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



9. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$
② $4x-3y+4=0$
③ $3x-3y+4=0$
④ $x-y+4=0$
⑤ $2x-y+1=0$

해설
두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2+2x-6y+8-(x^2+y^2-4y)=0$
$2x-2y+8=0$
$\therefore x-y+4=0$

10. 두 원 O와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

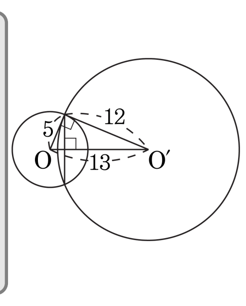
① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$

$\therefore\ x = \frac{120}{13}$

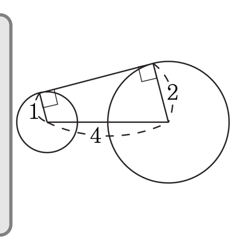


11. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{15}$　③ 0　④ $2\sqrt{5}$　⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4 이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



12. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과
직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

13. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ $\mathrm{B}(3,\ 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0,\ 3),\ r=10$　　② $(0,\ 3),\ r=\sqrt{10}$

③ $(0,\ 2),\ r=10$　　④ $(0,\ 2),\ r=\sqrt{10}$

⑤ $(0,\ -3),\ r=10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
$x^2+(y-a)^2=r^2 \quad \cdots$ ① 이다.
$(-1,0)$ 을 $(3,2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
$a^2=r^2-1 \quad \cdots$ ②
$(a-2)^2=r^2-9 \quad \cdots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
$a^2=(a-2)^2+8$
$\Rightarrow \quad a=3 \quad r=\sqrt{10}$
$\therefore$ 중심은 $(0,\ 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

14. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a) = (-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

15. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ······㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

16. 두 점 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 1)$ 로부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 에 대하여 $\angle$PAB 가 최대일 때 선분 AP 의 길이는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 로 놓으면

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\left\{(x-2)^2 + (y-1)^2\right\}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

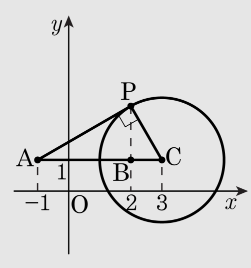
$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

따라서 점 P 는 중심이 $(3,\ 1)$ 이고

반지름의 길이가 2 인 원 위를 움직이므로

$\angle$PAB 가 최대가 되는 것은

그림과 같이 직선 AP 가 원에 접할 때이다.



원의 중심을 C 라 하면

$\triangle$PAC 에서

$\angle$APC $= 90°$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{PC}}^2}$

$= \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

17. 점 $A(6,\ 0)$와 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 위의 점 P를 잇는 선분 AP를 $1\ :\ 2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ ② $(x-3)^2+(y-1)^2=2$
③ $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ ④ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$
⑤ $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

해설

원$(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$
$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta),\ \mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}$ 를 $1:2$ 로 내분한 점
$\mathrm{Q}(x,\ y)$는 $\mathrm{Q}\left(\frac{\alpha+12}{3},\ \frac{\beta}{3}\right)$
$\therefore\ x=\frac{\alpha+12}{3},\ y=\frac{\beta}{3}\cdots\cdots$①
그런데 점$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ 는 원 위의 점이므로
$(\alpha+3)^2+(\beta-3)^2=9\cdots\cdots$②
①,②에서 구하는 자취는 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

18. 두 원 $x^2+y^2-4x=0, x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 교점과 점 $(1,\ 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3　② $-\frac{5}{2}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-6x-2y+8)+k(x^2+y^2-4x)=0$

위 식이 점 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$x=1, y=0$ 을 대입하면 $3-3k=0, k=1$

$k=1$ 을 위식에 대입하여

정리하면 $x^2+y^2-5x-y+4=0$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$a=\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ 이다.

19. 원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

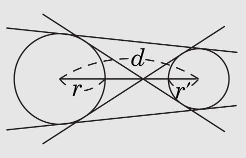
원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1+a)x+(a+1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$ 를 지나므로
$(1+a)\times(-1)+(a+1)\times(-a)-2=0$
$a^2+2a=0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

20. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여

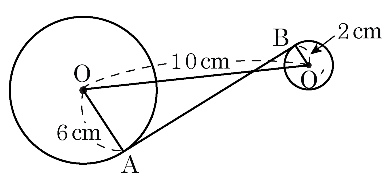
두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면

$r+r'=5, r \sim r'=1$ $d=9$ 이므로

$r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

21. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통접선 AB 의 길이를 구하면?

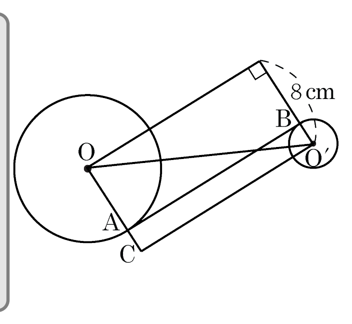


① 6　　② 8　　③ 10

④ 7　　⑤ 9

해설

다음 그림과 같이 AB를 평행이동 시켜 생각하면
OO′C 는 직각삼각형이고
$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}}$ 이다.
$\therefore \ \overline{\mathrm{O'C}}^2 = 100^2 - 8^2 = 36,\ \overline{\mathrm{O'C}} = 6$



22. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \therefore 19$ 개

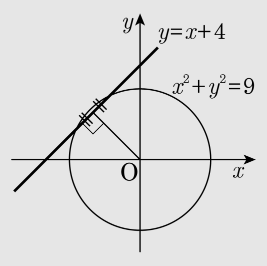
23. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

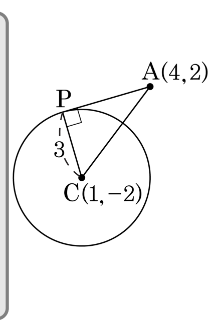
24. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



25. 직선 $(a+2)x+(a-1)y-3=0$ 이 원 $2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$

$2(x-1)^2+2(y+2)^2=7$

$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{7}{2}$

따라서 원의 중심 $(1,-2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2)\times 1+(a-1)\times(-2)-3=0$

$\therefore\ a=1$