

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

② $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

④ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 의 중심이 (a, b) , 반지름의 길이가 r 일 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

따라서, 중심은 $(2, 3)$

반지름의 길이가 4 이므로

$$a = 2, b = 3, r = 4$$

$$\therefore a + b + r = 9$$

3. 좌표평면에서 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다.
 $(x, 15)$ 가 원 위의 점일 때, x 는?



① 10

② 12.5

③ 15

④ 17.5

⑤ 20

해설

두 점 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 의 중점 $(10, 0)$ 이 중심이고
반지름은 15인 원이므로

$$(x - 10)^2 + y^2 = 225$$

$(x, 15)$ 가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,

$$(x - 10)^2 + 15^2 = 225 \quad \therefore x = 10$$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2 - 4c = 0$

② $b^2 + 4c = 0$

③ $a^2 - 4c = 0$

④ $a^2 + b^2 - 4c = 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 4c = 0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x = 0$ 을 대입하면 되므로

$$y^2 + by + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

원이 y 축과 접하려면 $\textcircled{7}$ 의

식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D = 0$

$$\therefore D = b^2 - 4c = 0$$

5. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = 2x + k \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$$

(가) 0

k^2 (나) 5 $\therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다): $k = \pm \sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.

(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$

(다): $k^2 - 5 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

6. 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면

$$(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$$

$$\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$$

$$\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$A = -1, B = 1, C = -2$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

7. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$

② $k < -1$

③ $k > -2$

④ $k < 2$

⑤ $k > 1$

해설

방정식을 정리하면, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - k$
원이 되려면 $2 - k > 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore k < 2$

8. 반지름의 길이가 5cm, 8cm 인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

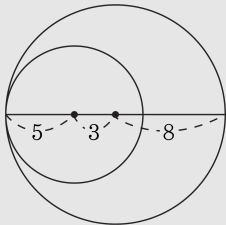
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에
내접한다.



9. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

10. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$

② $\frac{90}{13}$

③ $\frac{120}{13}$

④ $\frac{150}{13}$

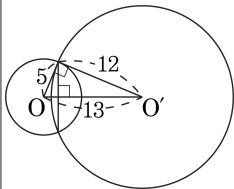
⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면
 $\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



11. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{15}$

③ 0

④ $2\sqrt{5}$

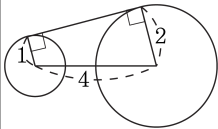
⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.

피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면

$$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \text{ 이다.}$$



12. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

13. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $A(-1, 0)$ $B(3, 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0, 3), r = 10$

② $(0, 3), r = \sqrt{10}$

③ $(0, 2), r = 10$

④ $(0, 2), r = \sqrt{10}$

⑤ $(0, -3), r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \quad \dots \text{① 이다.}$$

$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,

$$a^2 = r^2 - 1 \quad \dots \text{②}$$

$$(a - 2)^2 = r^2 - 9 \quad \dots \text{③}$$

③ 을 ② 에 대입하면,

$$a^2 = (a - 2)^2 + 8$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad r = \sqrt{10}$$

$\therefore$ 중심은 $(0, 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

14. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

15. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{7}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

16. 두 점 A(-1, 1), B(2, 1)로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 에 대하여 $\angle PAB$ 가 최대일 때 선분 AP 의 길이는?

① $\sqrt{10}$

② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{13}$

④ $3\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

점 P 의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 점 P 는 중심이 (3, 1) 이고

반지름의 길이가 2 인 원 위를 움직이므로

$\angle PAB$ 가 최대가 되는 것은

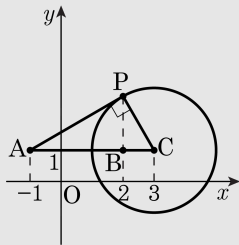
그림과 같이 직선 AP 가 원에 접할 때이다.

원의 중심을 C 라 하면

$\triangle PAC$ 에서

$\angle APC = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$



17. 점 $A(6, 0)$ 와 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ 위의 점 P 를 잇는 선분 AP 를 1 : 2로 내분하는 점 Q 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

② $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$

③ $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

④ $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

⑤ $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

해설

$$\text{원 } (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$P(\alpha, \beta)$, $Q(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP}$ 를 1 : 2로 내분한 점

$$Q(x, y) \text{는 } Q\left(\frac{\alpha + 12}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + 12}{3}, y = \frac{\beta}{3} \dots\dots ①$$

그런데 점 $P(\alpha, \beta)$ 는 원 위의 점이므로

$$(\alpha + 3)^2 + (\beta - 3)^2 = 9 \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{에서 구하는 자취는 } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

18. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② $-\frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

위 식이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$x = 1, y = 0 \text{ 을 대입하면 } 3 - 3k = 0, k = 1$$

$k = 1$ 을 위식에 대입하여

$$\text{정리하면 } x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 $a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ 이다.

19. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

① -4

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이

원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이

원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(1+a)x + (a+1)y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦이 점 $(-1, -a)$ 를 지나므로

$$(1+a) \times (-1) + (a+1) \times (-a) - 2 = 0$$

$$a^2 + 2a = 0$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

20. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

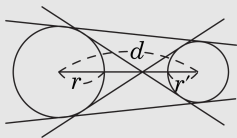
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

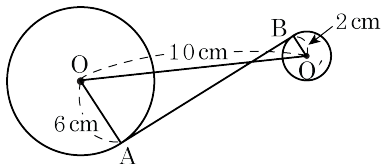
$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



21. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통접선 AB 의 길이를 구하면?

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 7 ⑤ 9

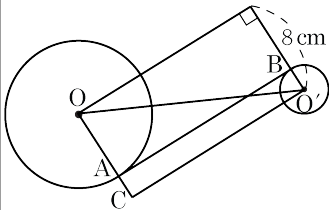


해설

다음 그림과 같이 AB 를 평행이동시켜 생각하면

$OO'C$ 는 직각삼각형이고
 $\overline{AB} = \overline{OC}$ 이다.

$$\therefore \overline{O'C}^2 = 10^2 - 8^2 = 36, \overline{O'C} = 6$$



22. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$$

23. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

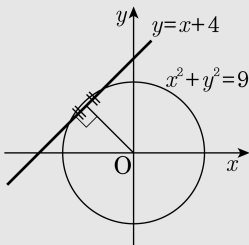
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

$$\text{이므로 } \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

$$\text{현의 길이는 } 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$$

24. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

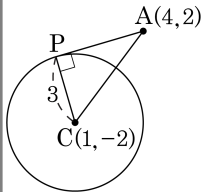
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.

다음 그림에서 접선의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$$

한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$

$$\therefore \overline{AP} = 4$$



25. 직선 $(a+2)x + (a-1)y - 3 = 0$ 이 원 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$$

$$2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 7$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{7}{2}$$

따라서 원의 중심 $(1, -2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2) \times 1 + (a-1) \times (-2) - 3 = 0$

$$\therefore a = 1$$