1. 좌표평면에서 두 점 $A(7,\ 2)$, $B(3,\ 5)$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

두 점 $A(7,\ 2)$, $B(3,\ 5)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2+(5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

2. 세 꼭짓점 $A(0,0)$, $B(-5,5)$, $C(2,7)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 4)$ ③ $(-2,\ 1)$
④ $(2,\ -2)$ ⑤ $(-4,\ -8)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{0+(-5)+2}{3},\ \frac{0+5+7}{3}\right)=(-1,4)$$

3. 기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.(단, a, b 는 상수)

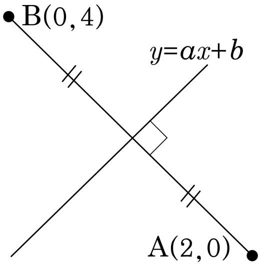
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은
$y=3(x+2)+3=3x+9$
따라서 $a=3,\ b=9$
$\therefore\ a+b=12$

4. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



① 4 ② 2 ③ 1 ④ −2 ⑤ −4

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $\dfrac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 M 은

$\mathrm{M}(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{0+4}{2}) = (1, 2)$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

$\therefore a + b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$

5. 점 $(4,\ 3)$과 직선 $5x-12y+3=0$ 사이의 거리를 d_1, 점 $(4,\ 3)$과 직선 $12x+5y-50=0$ 사이의 거리를 d_2라고 할 때, d_1과 d_2 사이의 관계는?

① $d_1=d_2$ ② $d_1=d_2+1$ ③ $d_1+1=d_2$

④ $d_1=d_2+2$ ⑤ $d_1+2=d_2$

해설

$$d_1=\frac{|5\cdot4-12\cdot3+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{169}}=1$$

$$d_2=\frac{|12\cdot4+5\cdot3-50|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{169}}=1$$

따라서 $d_1=d_2$

6. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$를 이은 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표가 $(-13, 12)$일 때, $a,\ b$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에서

선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점은

$$\left(\frac{2a-3\cdot(-1)}{2-3},\ \frac{2b-3\cdot 2}{2-3}\right)$$

$= (-2a-3, -2b+6) = (-13, 12)$이므로

$-2a-3=-13,\ -2b+6=12$

$\therefore\ a=5,\ b=-3$

7. A $(4,7)$, B $(3,2)$, C $(5,3)$, D (x,y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

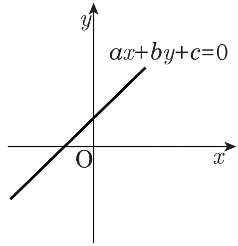
해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x+3=9,\ y+2=10$

$\therefore \quad x=6,\ y=8$

8. 직선 $ax+by+c=0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+ay+b=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제1사분면

② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제1사분면과 제3사분면

해설

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ 이므로

주어진 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

기울기 : $-\frac{a}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{a}{b} < 0$

y 절편 : $-\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore\ \frac{c}{b} < 0$

두 부등식에서 $\frac{a}{c} > 0$

마찬가지로 일차함수 $cx+ay+b=0$ 은

$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$,

기울기 : $-\frac{c}{a} < 0$

y 절편 : $-\frac{b}{a} > 0$

이상에서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

9. y절편이 3이고, 직선 $2x+y-1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-\frac{1}{2}x-3$ ③ $y=-x+3$

④ $y=\frac{1}{2}x-3$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
기울기의 곱이 -1일 때이다.
$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+3$이라면

$m\times(-2)=-1,\quad \therefore\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$

10. 두 점 $A(3, 2)$, $B(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4 \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\frac{2b+2}{3}-3=0,$$

$a+2b-1=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$$

$\therefore\ 3a+b=5$

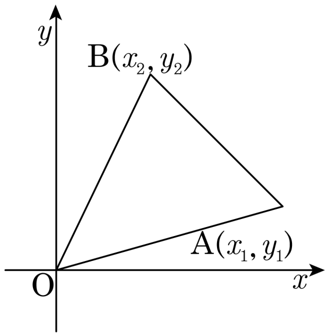
11. 두 직선 $y=x+1, y=-2x+4$의 교점과 점 $(-1,3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ② $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ③ $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
④ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

$y=x+1 \Leftrightarrow x-y+1=0$
$y=-2x+4 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$에서
두 직선의 교점을 지나는 방정식은
$(x-y+1)+k(2x+y-4)=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,3)$을 지나므로
$(-1-3+1)+k\cdot\{2\cdot(-1)+3-4\}=0$
$\therefore\ k=-1$
따라서, $k=-1$ 을 ㉠에 대입하면
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

12. 원점 O(0, 0)와 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$　② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$　③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$　⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B(x_2, y_2)에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

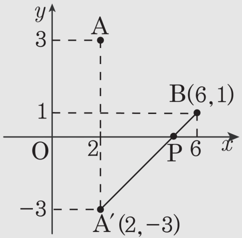
13. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하면?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

해설

(2, 3)을 x축에 대해 대칭이동한 점을 A′(2, −3)라 하면 최단거리는 $\overline{A'B}$의 길이

$\therefore\ \sqrt{(2-6)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



14. 세 점 A(2, 5), B(−1, 0), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$의 값은?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여

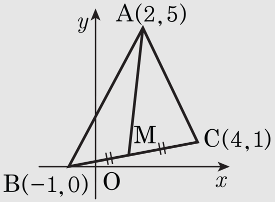
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$

$\therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

$= \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]$

$= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27$



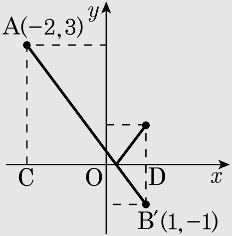
15. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

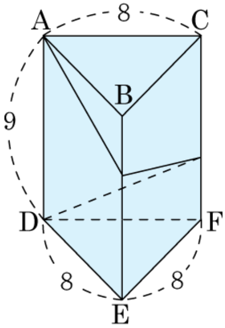
해설

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 되려면 점 B와 x축에 대한 대칭점을 B′ 이라 할 때, 세 점 A, P, B′이 한 직선 위에 있을 때이다.
그림에서처럼 점 B와 x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{B}'(1,\ -1)$이다.
그런데 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되는 것은 세 점 A, P, B′이 한 직선 위에 놓일 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{(-1)-3\}^2}$$
$$=\sqrt{3^2+4^2}=5$$



16. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

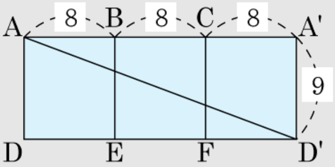


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



17. 직선 $(a-2)x-y-b+1=0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 이고, 점 $(1,\ 0)$ 을 지날 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=(a-2)x-b+1$ 에서 기울기는

$a-2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=3$

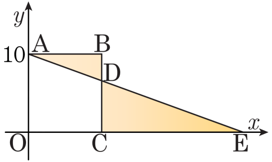
직선 $y=x-b+1$이 점 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0=1-b+1$

$\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=5$

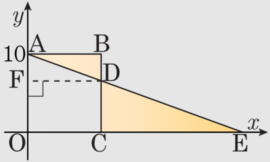
18. 다음 그림과 같은 정사각형 OABC 가 있다. 변 BC 위의 B, C 가 아닌 한 점 D 를 지나는 직선 AD 를 그을 때, 색칠된 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC 의 넓이와 같다면 직선 AD 의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

다음 그림과 같이 점 D 에서 y 축에 내린 수선의 발을 F 라 하면



$\triangle ADB = \triangle AFD$ 이므로

$\square OCDF = \triangle DCE$

즉, $\overline{OC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CD}$

$\therefore\ \overline{CE} = 2\overline{OC}$

E$(30, 0)$ 이므로 직선 AD 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$

19. 두 점 $(a,\ a+1)$과 $(a+1,\ a+2)$를 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 이 때 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{1}{2}a$　⑤ a

해설

두 점 $(a, a+1)$ 과 $(a+1, a+2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m = \frac{(a+2)-(a+1)}{(a+1)-a} = 1$$

따라서, 두 점을 지나는 직선의 방정식은

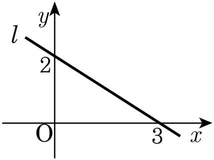
$y-(a+1) = (x-a)$이다.

즉, $y = x+1$이다.

이 때, 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(-1, 0), \mathrm{B}(0, 1)$이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

20. 직선 l의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중이 직선 위의 점은?



① $(0,\ 3)$　　② $(2,\ 0)$

③ $(2,\ 1)$　　④ $(6,\ -2)$

⑤ $(6,\ -1)$

해설

주어진 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$, y 절편이 2이므로

직선 l의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+2\cdots$ ㉠

따라서, ㉠ 을 만족하는 점은 $(6,\ -2)$ 이다.

21. 점 $(2,4)$ 를 지나며 기울기가 음인 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 16 이다. 이 직선의 x 절편을 a, y 절편을 b 라 할 때, $a+b$ 의값은?

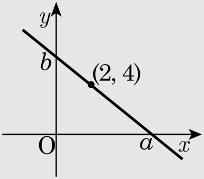
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

구하는 직선의 방정식을 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 이 직선이 점 $(2,4)$ 를 지나므로

$$\frac{2}{a}+\frac{4}{b}=1$$

$\therefore\ 4a+2b=ab\cdots$ ㉠



$\triangle ABC$ 의 넓이가 16 이므로

$\dfrac{1}{2}ab=16\ \therefore\ ab=32\cdots$ ㉡

㉠ ㉡에서 $a=4, b=8, a+b=12$

22. 세 점 $(0,2)$, $(3,-3)$, $(-3,a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{-3-2}{3-0}=\dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

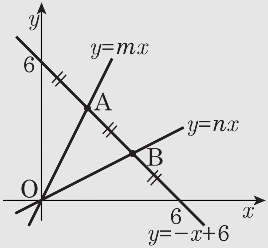
$\Rightarrow \quad a=7$

23. 직선 $x+y-6=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 직선 $y=mx$, $y=nx$ 에 의하여 삼등분 될 때, $m+n$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 직선 $y=-x+6$과 두 직선 $y=mx$, $y=nx$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 잇는 선분을 $2:1$로 내분하는 점이 A이고, $1:2$로 내분하는 점이 B이다.



이 때, 두 점 A, B의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot 6}{2+1},\ \frac{2\cdot 6+1\cdot 0}{2+1}\right),$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 6}{1+2},\ \frac{1\cdot 6+2\cdot 0}{1+2}\right)$$

$\therefore$ A$(2,\ 4)$, B$(4,\ 2)$

따라서, 직선 $y=mx$는 점 $(2,\ 4)$를 지나고, 직선 $y=nx$는 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$$m=2,\ n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore m+n=\frac{5}{2}$$

24. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

25. 직선 $3x-y-3=0$ 위의 점 중에서 직선 $12x+5y+14=0$ 과의 거리가 2 인 점의 좌표를(a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은? (단 $a>0$)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

점 (a, b) 가 직선 $3x-y-3=0$ 위에 있으므로
$3a-b-3=0 \quad \therefore b=3a-3$
점 $(a, 3a-3)$ 과 직선 $12x+5y+14=0$ 사이의
거리가 2 이므로 $\frac{|12a+5(3a-3)+14|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$,
$\frac{|27a-1|}{13}=2$, $|27a-1|=26, 27a-1=\pm 26$
$\therefore\ a=1$ 또는 $a=-\frac{25}{27}$
$a>0$ 이므로 $a=1, b=0$,
$\therefore\ a+b=1$