

1.  $(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$ 를 전개했을 때,  $x^2$ 과  $x^3$ 의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수  $a, b$ 에 대하여  $a + b$ 의 값은?

- ① -2      ② -1      ③ 1      ④ 2      ⑤  $\frac{3}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) \\ &= x^5 + bx^4 + (a+2)x^3 + (ab+2)x^2 + (2a+2b)x + 4 \\ & (x^2 \text{의 계수}) = (x^3 \text{의 계수}) = 0 \text{이므로} \\ & ab + 2 = 0, a + 2 = 0 \\ & \text{따라서 } a = -2, b = 1 \\ & \therefore a + b = -1 \end{aligned}$$

2. 임의의  $x$  에 대하여  $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$  를 만족하는 상수  $a, b, c, d$  의 합  $a+b+c+d$  의 값은?

- ① -2    ② -1    ③ 0    ④ 1    ⑤ 2

해설

양변에  $x = 0$  을 대입 하면  
 $-1 = a + b + c + d$   
 $\therefore a + b + c + d = -1$

해설

$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$   
 $= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$   
 $= (x+1)\{a(x+1) + b\} + c + d$  이므로  
 $x^3 - 1$  을  $x+1$  로 연속으로 나눌 때  
 차례대로 나오는 나머지가  $d, c, b$  가 되고 마지막 몫이  $a$  이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & -1 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & \underline{-2} \leftarrow d \\
 & & -1 & 2 & \\
 -1 & 1 & -2 & \underline{3} & \leftarrow c \\
 & & -1 & & \\
 & 1 & \underline{-3} & & \leftarrow b \\
 & \uparrow & & & \\
 & a & & & 
 \end{array}$$

3. 다항식  $x^3+ax-8$ 을  $x^2+4x+b$ 로 나눌 때, 나머지가  $3x+4$ 가 되도록 상수  $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $-7$

해설

$x^3+ax-8$ 을  $x^2+4x+b$ 로 직접나눈 나머지는  
 $(a-b+16)x+4b-8$   
 $(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\text{㉠}$   
㉠이  $x$ 에 대한 항등식이므로,  
 $a-b+16=3, 4b-8=4$   
 $\therefore a=-10, b=3$   
 $\therefore a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여  $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

4.  $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$ 을 인수분해 하면?

①  $(x-y)(x+y+1)$

②  $(x+y)(x-y-1)$

③  $(x-y)(x-y-1)$

④  $(x+y)(x+y-1)$

⑤  $(x+y)(x+y+1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2xy - x - y \\ &= (x+y)^2 - (x+y) = (x+y)(x+y-1) \end{aligned}$$

5. 두 다항식  $x^3 + 1$ ,  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 의 최대공약수를 구하면?

- ①  $x$       ②  $x+1$       ③  $x+2$       ④  $x-1$       ⑤  $x-2$

해설

$$\begin{aligned}x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 - x + 1) \\x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x-2)(x+1)(x+3) \\ \text{따라서 최대공약수는 } &x+1\end{aligned}$$

6. 두 다항식  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가  $x - 1$ 일 때,  $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2      ② 1      ③ 0      ④ -1      ⑤ -2

해설

최대공약수가  $x - 1$ 이므로  
 $x^2 + ax + b$ 와  $x^2 + 3bx + 2a$ 는  
모두  $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.  
 $\therefore 1 + a + b = 0$ 이고  $1 + 3b + 2a = 0$   
따라서,  $a = -2$ ,  $b = 1$   
 $\therefore a + b = -1$

7. 두 다항식  $A = a + 2b$ ,  $B = 2a + 3b$ 일 때,  $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▶ 정답: ㉤

해설

$$\text{㉤ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{ 결합법칙}$$

8.  $x$  에 대한 다항식  $x^3 + ax^2 + bx + 2$  를  $x^2 - x + 1$  로 나눈 나머지가  $x + 3$  이 되도록  $a, b$  의 값을 정할 때,  $ab$  값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

9.  $x+y+z=1$ ,  $xy+yz+zx=2$ ,  $xyz=3$  일 때,  $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하면?

① -2    ② -1    ③ 0    ④ 1    ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x+y+z &= 1 \text{ 에서} \\x+y &= 1-z \\y+z &= 1-x \\z+x &= 1-y \\(x+y)(y+z)(z+x) &= (1-z)(1-x)(1-y) \\&= 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

10. 임의의 실수  $x$  에 대하여 등식  $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$  가 성립할 때,  $a+b+c+d$  의 값은? (단,  $a, b, c, d$  는 상수)

- ① -3      ② -1      ③ 0      ④ 3      ⑤ 5

**해설**

계수의 합  $a+b+c+d$  를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는  $x$  값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는  $x = 2$  를 양변에 대입하면

$$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

**해설**

$a, b, c, d$  의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$= (x-1)[(x-1)(a(x-1) + b) + c] + d$$

즉,  $x-1$  로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로  $d, c, b$  가 되고 마지막 몫이  $a$  이다.

1	2	-3	-1	1	
	2	-1	-2		
1	2	-1	-2	-1	← d
	2	1			
1	2	1	-1	-1	← c
	2				
	2	3			← b
	↑				
	a				

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

11.  $x$ 에 대한 다항식  $x^3 + kx^2 + kx - 1$ 을  $x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를  $Q_1(x), R_1$ ,  $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를  $Q_2(x), R_2$ 라 할 때,  $R_1 = R_2$ 를 만족하는 실수  $k$ 의 값을 구하면?

- ① -4      ② -2      ③ 0      ④ 2      ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + kx^2 + kx - 1 &= (x - 2)Q_1(x) + R_1 \\ &= (x + 2)Q_2(x) + R_2\end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } R_1 = 8 + 4k + 2k - 1 = 6k + 7$$

$$x = -2 \text{ 대입, } R_2 = -8 + 4k - 2k - 1 = 2k - 9$$

$$R_1 = R_2 \text{ 이므로 } 6k + 7 = 2k - 9$$

$$\therefore k = -4$$

12. 다항식  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에서  $f(x)$ 를  $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 2이고  $g(x)$ 를  $x^2 - 3x + 2$ 로 나눈 나머지가  $2x + 1$ 이다.  $2f(x) + 3g(x)$ 를  $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

① 13      ② -13      ③ 16      ④ -16      ⑤ 26

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1)Q_1(x) + 2, \\ \therefore f(1) &= 2 \\ g(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q_2(x) + 2x + 1, \\ \therefore g(1) &= 3 \\ 2f(x) + 3g(x) &\text{를 } x - 1 \text{로 나눈 나머지는} \\ 2f(1) + 3g(1) &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \end{aligned}$$

13. 삼각형 ABC의 세변의 길이  $a, b, c$  사이에  $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ①  $b = c$ 인 이등변 삼각형
- ②  $a = c$ 인 이등변삼각형
- ③  $b$ 가 빗변의 길이인 직각삼각형
- ④ 정삼각형
- ⑤  $c$ 가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \quad (\because a+b \neq 0) \\ \therefore c &\text{가 빗변의 길이인 직각삼각형}\end{aligned}$$

14. 다음 식을 인수분해하면  $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$  일 때,  $a + b + c + d$  의 값을 구하여라. ( $a, b, c, d$ 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2) \\ \therefore a + b + c + d &= 4\end{aligned}$$

15.  $a + b + c = 7$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 21$ ,  $abc = 8$  일 때,  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① 26      ② 48      ③ 84      ④ 96      ⑤ 112

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ 49 &= 21 + 2(ab + bc + ca) \\ \therefore ab + bc + ca &= 14 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ &= (14)^2 - 2(8 \times 7) \\ &= 84\end{aligned}$$

16. 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $x^2 + y^2 = 7$ ,  $x + y = 3$  일 때,  $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

17. 이차식  $f(x)$ 를 각각  $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고,  $f(1) = 0$ 일 때,

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소}) \text{이다. 이 때, } m+n \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$  이므로  $f(x)$  는  $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

18. 두 다항식  $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$ ,  $g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$ 의 최대공약수  $G(x)$ 가  $x$ 의 이차식일 때,  $ab$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$$

$$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a - b)x - 6$$

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a + b)x$$

$$= x\{2x^2 + (a + b)\}$$

$G(x)$ 는  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$$\therefore 2x^2 + (a - b)x - 6 = 2x^2 + (a + b)$$

$$a - b = 0, a + b = -6$$

$$\therefore a = -3, b = -3, ab = 9$$

19.  $x^{100}$ 을  $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

- ①  $100x + 101$       ②  $100x - 99$       ③  $-100x - 99$   
 ④  $-99x - 98$       ⑤  $99x + 100$

**해설**

구하는 나머지를  $ax + b$ 라 하면  
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$   
 $x^{100}$ 을  $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로  
 $x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \Rightarrow a+1 = b$   
 $x^{100} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$   
 $(x^2)^{50} - 1 = (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$   
 $(x^2 - 1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\}$   
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$   
 $(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\}$   
 $= (x+1)\{(x+1)Q(x) + a\}$   
 $(x-1)\{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \dots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$   
 양변에  $x = -1$ 을 대입하면  
 $(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \dots + 1 + 1) = a$   
 $a = -100, a+1 = b$ 에서  $b = -99$   
 $\therefore$  구하는 나머지는  $-100x - 99$

20. 세 실수  $a, b, c$  사이에  $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$  인 관계가 성립할 때,  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  의 값은?

㉠ 0

㉡ 1

㉢ 0, 2

㉣ 0, 1

㉤ 0, 1, 2

해설

$$a^2 - bc = b^2 - ac \text{ 에서 } (a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$$

$$\therefore (a+b+c)(a-b) = 0 \cdots \text{㉠}$$

$$b^2 - ac = c^2 - ab \text{ 에서 } (b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$$

$$\therefore (a+b+c)(b-c) = 0 \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서  $a+b+c=0$  또는  $a=b=c$

한편  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로}$$

i)  $a+b+c=0$  일 때  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

ii)  $a=b=c$  일 때

(준식)  $= 3a^3 - 3a^3 = 0$

따라서  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$