1. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$

$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$

(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로

$ab+2=0,\ a+2=0$

따라서 $a=-2,\ b=1$

$\therefore a+b=-1$

2. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면

$-1=a+b+c+d$

$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$

$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로

x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때

차례대로 나오는 나머지가 d, c, b가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1	
		-1	1	-1	
-1	1	-1	1	-2	$\leftarrow$ d
		-1	2		
-1	1	-2	3 $\leftarrow$ c		
		-1			
	1	-3	$\leftarrow$ b		
	$\uparrow$				
	a				

3. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

4. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$

② $(x+y)(x-y-1)$

③ $(x-y)(x-y-1)$

④ $(x+y)(x+y-1)$

⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$$x^2+y^2+2xy-x-y$$
$$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$$

5. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

6. 두 다항식 x^2+ax+b, $x^2+3bx+2a$의 최대공약수가 $x-1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로

x^2+ax+b와 $x^2+3bx+2a$는

모두 $x-1$로 나누어 떨어져야 한다.

$\therefore\ 1+a+b=0$이고 $1+3b+2a=0$

따라서, $a=-2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-1$

7. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) \\
&= (2a+4b)+(2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a+(4b+2a)+3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a+(2a+4b)+3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a+2a)+(4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2+2)a+(4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a+7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

8. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ \ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서

$x+y=1-z$

$y+z=1-x$

$z+x=1-y$

$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

10. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1 이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.
이 문제에서는 $x = 2$ 를 양변에 대입하면
$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$
$\therefore\ a + b + c + d = 3$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.
$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
$= (x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c] + d$
즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	−3	−1	1		
		2	−1	−2		
1	2	−1	−2	−1	←	d
		2	1			
1	2	1	−1	←	c	
		2				
	2	3	← b			
	↑					
	a					

$\therefore\ a + b + c + d = 3$

11. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

12. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2,$

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1,$

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

13. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right) = 0\end{aligned}$$

$a^2 + b^2 = c^2 \ (\because \ a + b \neq 0)$

$\therefore c$가 빗변의 길이인 직각삼각형

14. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

15. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49 = 21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times 7)$

$=84$

16. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 18-1^2\times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

17. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

18. 두 다항식 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$,$g(x)=x^3-x^2+bx+3$의 최대공약수 $G(x)$가 x의 이차식일 때, ab를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x)=x^3+x^2+ax-3$

$g(x)=x^3-x^2+bx+3$

$f(x)-g(x)=2x^2+(a-b)x-6$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= 2x^3+(a+b)x \\ &= x\{2x^2+(a+b)\} \end{aligned}$$

$G(x)$ 는 $f(x)-g(x), f(x)+g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2+(a-b)x-6=2x^2+(a+b)$

$a-b=0,\ a+b=-6$

$\therefore\ a=-3, b=-3$, $ab=9$

19. x^{100}을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ $(\Rightarrow a+1=b)$

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100$, $a+1=b$에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

20. 세 실수 $a,\ b,\ c$사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2

④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0 \cdots$ ㉠

$b^2-ac=c^2-ab$에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로

i) $a+b+c=0$일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

ii) $a=b=c$일 때

(준식)$=3a^3-3a^3=0$

따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$