1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$
② x는 모든 실수
③ $x \neq 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$
$(x-3)^2 \leq 0$
$\Rightarrow x = 3$

2. 이차부등식 $x^2-2kx+2k\le 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1\le k\le 0$　② $-2<k<0$
③ $0\le x\le 2$　④ $0<k<2$
⑤ $k<0$, 또는 $k>2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2-2kx+2k=0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=k^2-2k<0,\ \ k(k-2)<0$
$\therefore 0<k<2$

3. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3 \geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3) \leq 0$, $(a-3)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

4. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

5. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8|\le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8|\le 8$을 풀면

$-8\le x^2-8\le 8$

$0\le x^2\le 16$

$\therefore -4\le x\le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k<x-2<k$

$-k+2<x<k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8|\le 8$을 만족하려면

$-k+2\ge -4,\ k+2\le 4$이어야 하므로

$k\le 6,\ k\le 2$

$\therefore 0<k\le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

6. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2-6x+1 \le 0$　　② $x^2-2x-3<0$

③ $x^2-x+1>0$　　④ $x^2-6x+9>0$

⑤ $4x^2-4x+1<0$

해설

① $(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow -1<x<3$

③ $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0 \Rightarrow x \neq 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다

7. x에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a < b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a < b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a < 0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b < 0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2 - 2(a-b)x - 3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a < b$이면 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a > b$이면
$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \geq 0$
$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

8. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$을 풀면?

① $-5 < x < 5$　② $-5 < x < 0$　③ $-5 < x < 1$
④ $-1 < x < 5$　⑤ $-1 < x < 6$

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로
$x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x-5)(x+1) < 0$
$-1 < x < 5$
이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$
(ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 4x - 5 < 0$, $(x+5)(x-1) < 0$
$-5 < x < 1$
이 때 $x < 0$과 공통 범위는 $-5 < x < 0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5 < x < 5$

9. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2} < x \le 3$ ③ $2 \le x < 3$
④ $1 \le x < 3$ ⑤ $1 \le x \le 4$

해설

$[x] = t$로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$이므로
부등식을 풀면 $(2t-3)(t-3) < 0$

$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$

따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$에서 $[x] = 2$

$\therefore 2 \le x < 3$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2　　② -2　　③ 4　　④ -4　　⑤ 0

해설

$f(x)=0 \iff x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \iff 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\iff x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

11. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

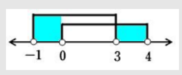
④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

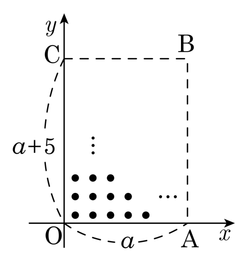
$x^2+ax+a=0 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots$ ㉡

㉠에서 허근을 가지려면
$D=a^2-4a<0$
$\therefore\ 0<a<4$
㉡에서 허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$
$(a+1)(a-3)<0$
$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면, 

$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

12. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

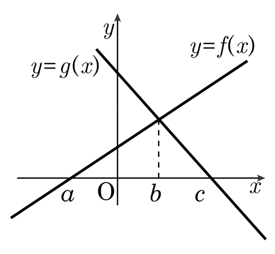
해설

$(a-1)(a+4) \le 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \le 0$

$\therefore 0 < a \le 6$

13. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \geq 0$ 의 해는?



① $a \leq x \leq b$　　② $a \leq x \leq c$

③ $b \leq x \leq c$　　④ $x \leq b,\ x \geq c$

⑤ $x \leq a,\ x \geq c$

해설

$f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지의 경우가 있다.

$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$

그런데 그래프에서 $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$ 의 경우는 없으므로 $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ 을 만족하는 x 의 범위를 구하면 된다.

주어진 함수의 그래프를 살펴 보면

$x \leq a$ 일 때, $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$

$a \leq x \leq c$ 일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$

$x \geq c$ 일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \leq 0$

따라서 구하는 해는 $a \leq x \leq c$

14. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$　　② $-\frac{1}{4} < a < 0$　　③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$
④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로
$2x - a = x^2 - 4ax + 1$
$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$
$D < 0 :\ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$
$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$
$\therefore\ -\frac{3}{4} < a < 0$

15. $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$