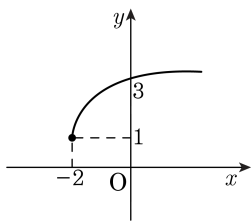


1. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$
또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{2a} + 1, \quad \sqrt{2a} = 2$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$ 이고,

이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

2. $1 \leq x \leq a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6이다.
 $a + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \leq x \leq a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 은 증가함수이므로
 $x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.

$$\text{곧, } m = \sqrt{2-1} + 3 = 4$$

$$\therefore m = 4$$

또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{2a-1} + 3$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a + m = 9$$

3. 함수 $2|x| + |y| = 4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

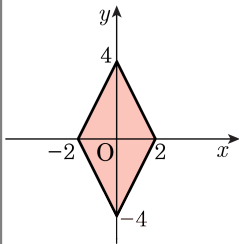
▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x| + |y| = 4$ 의 그래프는 $2x + y = 4$,
즉 $y = -2x + 4$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각
각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} =$
16



4. 함수 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 에서

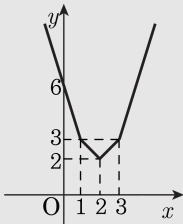
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3x - 6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 - (x - 3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x - 2) - (x - 3) = -x + 4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) = -3x + 6$

따라서 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2, n = 2$

$\therefore mn = 4$

5. $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ 이라 정의 할 때, $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)$ 를 계산하면?

① $\frac{1}{2n-1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

② $\frac{1}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n-1}{2n+1}$

③ $\frac{n}{2n-1}$

해설

$$1 - \frac{2}{2k+1} = \frac{2k-1}{2k+1} \text{ 이므로}$$

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k+1} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

6. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{a}{100}, \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{b}{101}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 149

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 1 - \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$= \frac{99}{100} = \frac{a}{100}$$

$$\therefore a = 99$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101} = \frac{b}{101}$$

$$\therefore b = 50$$

$$\therefore a + b = 149$$

7. 서로소인 두 자연수 $m, n (m > n)$ 에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$ 을 나타낼 때, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은?

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

① 7

② 8

③ 9

④ 10

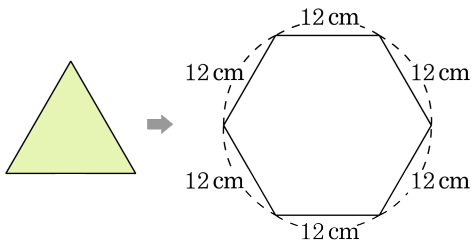
⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} \frac{151}{87} &= 1 + \frac{64}{87} = 1 + \frac{1}{\frac{87}{64}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{23}{64}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{64}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{18}{23}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{18}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{5}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{1 + \frac{3}{3}}}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} \end{aligned}$$

$\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 3$ 이므로
 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 1 + 3 = 7$

8. 한 변의 길이가 6 cm 인 정삼각형 모양의 타일을 붙여서 다음과 같은 모양을 만들려고 합니다. 정삼각형 타일은 몇 개가 필요하겠는지 구하시오.



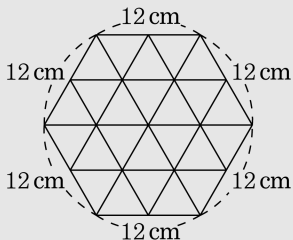
▶ 답 :

개

▶ 정답 : 24 개

해설

종이로 정삼각형을 만들어 붙여 봅니다.



9. 전체집합 $U = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 의 부분집합

$$A = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{1}{x} \right\}, B = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{1}{x} \right\}, C = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{2}{x} \right\},$$

$D = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{2}{x} \right\}$ 에 대하여 다음 포함관계 중 옳지 않은 것은?

① $A \supset C$

② $B \supset D$

③ $A \cap B = \emptyset$

④ $C \cap D = \emptyset$

⑤ $A - B = A$

해설

$y = \frac{1}{x} \dots \textcircled{1}$, $y = \frac{2}{x} \dots \textcircled{2}$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.

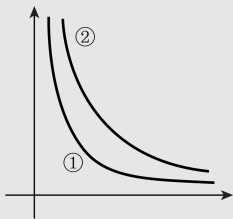
A의 영역이 C의 그것을 포함하므로 ①은 옳다.

D의 영역이 B의 그것을 포함하므로 ②는 옳지 않다.

A와 B는 만나지 않으므로 ③은 옳다.

C와 D는 만나지 않으므로 ④는 옳다.

A와 B는 만나지 않으므로 ⑤ 역시 옳다.



10. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ 에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

11. 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a$, $y = b$ 라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\therefore \text{점근선은 } x = 2, y = 1$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$y = \sqrt{2x+1} \text{ 의 } \left(x \geq -\frac{1}{2}\right) \text{ 역함수는}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore \text{최솟값은 } -\frac{1}{2}$$

12. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P의 좌표를 구하면?

① $(1, -2)$

② $(-3, -1)$

③ $(1, 1)$

④ $(-2, -2)$

⑤ $(1, 1), (-2, -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$f(x) = x$ 의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1, -2$$

$$x = 1 (\because x \geq -1)$$

$$\therefore P = (1, 1)$$

13. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S, A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답: 36 개

해설

함수 $f: A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.

$A \cup B = S, A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고

함수 f 가 일대일 대응이므로

두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서

1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.

예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}, B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.

한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로

구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

14. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$

② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$

④ $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots \textcircled{1}$$

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

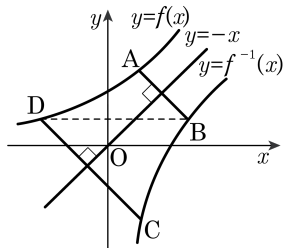
$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 x 를 소거하면 $2h(y) - 1 = g(h)$

$$\text{그러므로 } h(y) = \frac{1}{2} \{g(h) + 1\}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$$

15. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다. 점 A 의 x 좌표가 a 일 때, $\square ABCD$ 의 넓이는? (단, BD 는 x 축에 평행하다.)



- ① $\frac{1}{2} \{f(a) - f^{-1}(a)\} \{f(a) - a\}$
 ② $\{f(a) - f^{-1}(a)\} \{f(a) - a\}$
 ③ $\frac{1}{2} a f^{-1}(a)$
 ④ $\frac{1}{2} \{f(a) - f^{-1}(a)\}^2$
 ⑤ $\{f(a) - a\} \{f^{-1}(a) - a\}$

해설

$A(a, f(a)), B(f(a), a), D(b, a)$

그런데 $f(b) = a$ 이므로 $b = f^{-1}(a)$

$\therefore D(f^{-1}(a), a)$

$\therefore C(a, f^{-1}(a))$

$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle CBD$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \{f(a) - f^{-1}(a)\} \{f(a) - a\}$$

$$\triangle CBD = \frac{1}{2} \{f(a) - f^{-1}(a)\} \{a - f^{-1}(a)\}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \{f(a) - f^{-1}(a)\}^2$$

16. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$ 을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$ 이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은?

① 25

② 32

③ 77

④ 85

⑤ 100

해설

$$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17} \text{ 이므로}$$

$$17 < a < 34$$

이 중에서 $\frac{17}{a}$ 가 유한소수가 되게하는 정수는

20, 25, 32이므로

$$20 + 25 + 32 = 77$$

17. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

① $ad = bc$

② $ab : cd = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

해설

$a : b = c : d$ 에서 $c = ka, d = kb$ 라 놓자.

① $ad = a \cdot kb = kab, bc = b \cdot ka = kab$

$\therefore ad = bc$

② $ab : cd = ab : k^2 ab = 1 : k^2$

$\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b}{a} : \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} : \frac{b}{a} = 1 : 1$

$\therefore ab : cd \neq \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d) = ka : k(a + b) = a : a + b$

$\therefore a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d = (ka + 2) : kb$

$\therefore (a + 2) : b \neq (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d)$

$= (a + b) : (ka + kb) = 1 : k, (2a + b) : (2c + d)$

$= (2a + b) : (2ka + kb) = 1 : k$

$\therefore (a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

18. a 가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a + \sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a - \sqrt{a^2})^2}$ 을 간단히 하면?

① a

② $2a$

③ $-a$

④ $-2a$

⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$ 이므로 $f(a) = |a + |a|| - |a - |a||$

$a \geq 0$ 인 경우와 $a < 0$ 인 경우로 나누어 생각하면

(i) $a \geq 0$ 일 때,

$$f(a) = |a + a| - |a - a| = |2a| = 2a$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

$$f(a) = |a - a| - |a - (-a)| = -|2a| = 2a$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 $f(a) = 2a$

19. 양수 x 의 소수 부분을 $y(0 \leq y < 1)$ 라 할 때, $x^2 + y^2 = 18$ 에 대하여 xy 의 값을 구하면?

㉠ 1

㉡ 2

㉢ 3

㉣ 4

㉤ 5

해설

$$y^2 = 18 - x^2, 0 \leq y < 1$$

$$0 \leq y^2 < 1, 0 \leq 18 - x^2 < 1$$

$$17 < x^2 \leq 18, \sqrt{17} < x \leq \sqrt{18}$$

$$x = 4.\times\times \therefore x - y = 4(0 \leq y < 1)$$

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 18$$

$$4^2 + 2xy = 18 \therefore 2xy = 18 - 16 = 2$$

$$\therefore xy = 1$$

20. 함수 $y = x - 2$ 의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$

② $y = x + 2$

③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$ 를 x 에 관해서 풀면

$$x = y + 2$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x + 2$