1. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$
② x^2-a^2
③ $2x^2+3ax+a^2$
④ $2x^2-3ax-a^2$
⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$ 이므로
$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$
따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2+5ax-3a^2$ 을 $x+3a$ 로 나눈 몫이므로
$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

2. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2와 x^2+ax+b의 최대공약수는 $x+1$이고, 최소공배수는 x^4-5x^2+4이다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2　　② 2　　③ 3　　④ 1　　⑤ -1

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x+2)(x-1)$
$x^2+ax+b=(x+1)(x+k)$
$x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
$\therefore\ (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=(x+1)(x+2)(x-1)(x+k)$
$\therefore\ k=-2$
$x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$
$\therefore\ a=-1, b=-2$
$\therefore\ ab=2$

3. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

4. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

5. 4차방정식 $x^4+2x^2+4x+8=0$을 $(x^2+a)^2-(2x+b)^2=0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$　② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$　③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$　⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2+a)^2-(2x+b)^2$
$=x^4+(2a-4)x^2-4bx+a^2-b^2$
이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로
$2=2a-4,\ 4=-4b,\ 8=a^2-b^2$
$\therefore a=3,\ b=-1$
따라서 주어진 4차방정식은
다음과 같이 변형하면,
$(x^2+3)^2-(2x-1)^2=0$
$\therefore\ (x^2-2x+4)(x^2+2x+2)=0$
$\therefore\ x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1\pm i$

6. $1-\sqrt{2}$ 가 방정식 $2x^2+px+q=0$ 의 해이고 유리수 p, q 가 $x^3+ax^2+2x+b=0$ 의 해 일 때 b 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -6 ⑤ -8

해설

유리수 계수의 이차방정식이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 이면
다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$ 이다.
두 근의 합은 2
두 근의 곱은 -1
$\therefore\ p=-4,\quad q=-2$ ($\because$ 근과 계수의 관계를 이용)
$p=-4,\ q=-2$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면
$-64+16a-8+b=0,\ -8+4a-4+b=0$ 연립하여 풀면
$a=5,\quad b=-8$

7. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

8. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \rightarrow$ 1985년, $t = 1 \rightarrow$ 1990년, $t = 2 \rightarrow$ 1995년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \rightarrow$ 1990년임을 알 수 있다.

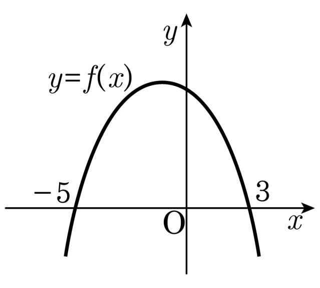
9. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$　② $2+3i$　③ $4-2i$
④ $-3+2i$　⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)
① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$
　$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$
　$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$
　$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴
④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$
　$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남
⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$
　$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right) = \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$
이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

11. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$\boxed{x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0}$$

① -1　② 3　③ $-\frac{9}{4}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ ……㉠

$\{9-3b+a=0\}$……㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

12. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을

x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$

이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,

$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로

실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.

$\therefore a+b=4$

13. 삼차방정식 $x^3-2x^2-4x+k=0$ 의 세 근 α,β,γ 에 대하여 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=-k$ 이므로

$\alpha+\beta=2-\gamma,\ \beta+\gamma=2-\alpha,\ \gamma+\alpha=2-\beta$

주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-8-8+k=-k$

$\therefore\ k=4$

14. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$ ② $x^7 + y^7 = 1$ ③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$ ⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

15. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$x^2+2x+4=0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$