

1. 다항식 $x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 을 $x + 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① -33 ② -22 ③ -11 ④ 11 ⑤ 33

해설

$f(x) = x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 이라 하면,
 $f(x) = (x + 1)Q(x) + R$ 에서 $f(-1) = R$ 이므로
 $f(-1) = (-1)^{22} + (-1)^{11} - 22 + 11 = -11$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, 나머지는?

① $f(2)$

② $f(-2)$

③ $f(2) + Q(2)$

④ $Q(2)$

⑤ $Q(-2)$

해설

$$f(x) = (x-2)Q(x) + R$$

$$\therefore f(2) = R$$

3. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x - 1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x + 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m - n$ 의 값은?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + mx^2 + nx + 1 &= (x - 1)Q(x) \\ &= (x + 2)Q'(x) + 3\end{aligned}$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 + m + n + 1 = 0$$

$$\therefore m + n = -2 \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -2$ 을 대입하면

$$-8 + 4m - 2n + 1 = 3$$

$$\therefore 2m - n = 5 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } m = 1, n = -3$$

$$\therefore m - n = 4$$

4. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 -5 이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 1 이라고 한다. 이 때, 상수 m, n 에 대하여 $m + n$ 은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$ 이 라 하면,

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) - 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q_2(x) + 1$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = -5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 1$$

$$m = -3, \quad n = 2$$

따라서 $m + n = -1$ 이다.

5. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$
 $(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$
 $x = 1, x = -1$ 을 대입한다.
 $4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{A}$
 $2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면,
 $a = 7, b = 5$
 $\therefore$ 나머지 $R(x) = 7x + 5$
 $R(1) = 12$

6. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2+3x+2 로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+5$

② $-3x$

③ $3x+6$

④ $4x+7$

⑤ $5x+8$

해설

다항식 $f(x)$ 를 x^2+3x+2 , 즉 $(x+1)(x+2)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$f(x) = (x+1)(x+2)Q(x) + ax + b$ 로 놓을 수 있다.

문제의 조건에서 $f(-1) = 3$, $f(-2) = -1$ 이므로

$$f(-1) = -a + b = 3$$

$$f(-2) = -2a + b = -1$$

이것을 풀면 $a = 4$, $b = 7$

따라서, 구하는 나머지는 $4x+7$

7. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $6x+1$ 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $6x+7$

② $-6x+5$

③ $7x+7$

④ $7x-1$

⑤ $8x+13$

해설

$$f(1) = 6, f(x) = (x-2)^2 q(x) + 6x + 1$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \text{ 에서}$$

$$f(1) = a + b = 6, f(2) = 2a + b = 13$$

$$\therefore a = 7, b = -1$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는 $7x-1$ 이다.

8. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

10. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$
 $x = -1$ 을 양변에 대입하면 $R = -1$
 $\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$
 $\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $3 = 2Q(1) - 1$
 $\therefore Q(1) = 2$

11. x 의 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \\ (x^2-x+3)f(x) &= (x+1)Q(x) + R \\ x &= -1 \text{ 대입} \\ \therefore R &= 5f(-1) = 5 \times 2 = 10 \end{aligned}$$

12. 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 2 이고 $g(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눈 나머지가 $2x + 1$ 이다. $2f(x) + 3g(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1)Q_1(x) + 2, \\ \therefore f(1) &= 2 \\ g(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q_2(x) + 2x + 1, \\ \therefore g(1) &= 3 \\ 2f(x) + 3g(x) &\text{를 } x - 1 \text{로 나눈 나머지는} \\ 2f(1) + 3g(1) &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \end{aligned}$$

13. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $ax + b(a \neq 0)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \quad \therefore R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$g(x) = xf(x)$ 를 $ax + b$ 로 나눈 나머지는

$$g\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a}R$$

14. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진 다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -1$

$$\therefore a - 2b = 4$$

15. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$$

$$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -8+4a-2b+c=3$$

$$x=-1 \text{ 대입, } -1+a-b+c=0$$

$$x=1 \text{ 대입, } 1+a+b+c=0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a=3, b=-1, c=-3$$

$$\therefore abc=9$$

16. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

17. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & -b+a \end{array}$$

이때 $k = -1, c = -1, d = -a + 1, b - a + 1 = -1, -b + a = 2$ 이므로
 $k = -1, c = -1, a = 4, b = 2, d = -3$ 따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

18. 임의의 실수 x 에 대하여 $2x^3 - 5x + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 가 성립할 때, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ 의 값을 구하면?

- ① 56
- ② 28
- ③ -28
- ④ -46
- ⑤ -56

해설

a, b, c, d 는 $2x^3 - 5x + 2$ 를 $(x + 1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

-1	2	0	-5	2	
		-2	2	3	
-1	2	-2	-3	5	← d
		-2	4		
-1	2	-4	1		← c
		-2			
-1	2	-6			← b
	↑				
	a				

$\therefore a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2^2 - (-6)^2 + 1^2 - 5^2 = -56$

19. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$$

$$= (x+1)[(x+1)(a(x+1)+b)+c]+d$$
 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

-1		1	0	0	-1	
			-1	1	-1	
-1		1	-1	1	-2	← d
			-1	2		
-1		1	-2	3		← c
			-1			
		1	-3			← b
		↑				
		a				

$$\therefore abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$$

20. $2x^3 + 9x^2 + 11x + 7 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 가 x 에 대한 항등식일 때, a, b, c, d 를 차례로 구하면?
- ① 3, -1, 3, 2

② 2, 3, -1, 3

③ -3, 1, -3, -2

④ -2, -3, 1, -3

⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

-1	2	9	11	7	
		-2	-7	-4	
-1	2	7	4	3	← d
		-2	-5		
-1	2	5	-1		← c
		-2			
	2	3			← b
	↑				
	a				

$a = 2, b = 3, c = -1, d = 3$

21. $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 을 $A(x-3)^3 + B(x-3)^2 + C(x-3) + D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

① -20 ② 40 ③ -60 ④ 120 ⑤ -120

해설

$x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 을 $x - 3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x - 3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 D, C, B, A 가 되므로

3

1

-4

5

-3

3

-3

6

3

1

-1

2

3

3

6

← d

3

1

2

8

← c

1

5

← b

↑

a

∴ $ABCD = 1 \times 5 \times 8 \times 3 = 120$

22. x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
 $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5, Q(x) = (x+3)Q_1(x) + 3$ 이므로
 $P(x) = (x-2)((x+3)Q_1(x) + 3) + 5$
 $= (x-2)(x+3)Q_1(x) + 3x - 1$
 $\therefore P(-3) = -9 - 1 = -10$
따라서 $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는
 $-3P(-3) = -3 \times (-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서 양변에 x 를 곱하면
 $xP(x) = x(x-2)Q(x) + 5x \cdots \textcircled{1}$
나머지정리에 의해 $xP(x)$ 를 $x+3$ 로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3P(-3) = -3 \cdot (-5)Q(-3) - 15$
 $Q(-3) = 3$ 을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

23. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

24. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

- ① 4
- ② 14
- ③ 24
- ④ 34
- ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(2) = A + B + C + D$ 이므로
 $f(2)$ 를 구하기 위해서는
 $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,
 $f(t) = A(t - 1)^3 + B(t - 1)^2 + C(t - 1) + D$

1	3	0	-1	2
		3	3	2

1	3	3	2	4
		3	6	

1	3	6	8
		3	
3		9	

 $\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$
 $\therefore A + B + C + D = 24$

25. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

- ① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$
$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

i) $f(-1) = 3$ 에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$ 에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$ 에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -2, b = -1, c = 5$$
$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$
$$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$$

26. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 있다.
 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$
두 삼차다항식을 $x^2 - 1$ 로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때,
 $P(1999) - Q(1999)$ 의 값은?
- ① -3998 ② -1999 ③ 0
④ 1999 ⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$ 로 놓으면
 $H(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어지므로
 $H(x) = 2x^3 + (a - c)x^2 + (b - d)x + 3998$
 $= (x^2 - 1)(2x - 3998)$ 으로 놓을 수 있다.
 $(\because x^3$ 의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫은 $2x - 3998$ 이다.)
 $\therefore P(1999) - Q(1999)$
 $= H(1999)$
 $= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$
 $= 0$

27. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① $x - 4$
- ② $4x - 1$
- ③ 5
- ④ 4
- ⑤ 3

해설

$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.
 $w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면
 $w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$
 $x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$ 에
 w 를 대입하면,
 $(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$
 $3 = aw + b$
 w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$
 $\therefore$ 나머지= 3

28. 다항식 $x^3 - 2x^2 + mx - 4$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫이 $Q(x)$ 이고 몫 $Q(x)$ 를 $x + 1$ 로 나눈 나머지가 -5 이다. 이때, m 의 값을 구하면?

- ① 6
- ② 4
- ③ 0
- ④ -1
- ⑤ -6

해설

$x^3 - 2x^2 + mx - 4 = (x - 1)Q(x) + R$ 이라 하자.
 $x = 1$ 을 대입하면 $R = m - 5$
 $x^3 - 2x^2 + mx - 4 = (x - 1)Q(x) + m - 5 \cdots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x + 1$ 로 나눈 나머지가 -5 이므로
 $Q(-1) = -5$
 $\textcircled{1}$ 식에 $x = -1$ 을 대입하면
 $-1 - 2 - m - 4 = -2Q(-1) + m - 5$
 $-2m = 12$
 $\therefore m = -6$

해설

조립제법을 사용하면

1

1

-2

m

-4

1

-1

m-1

m-5

-1

1

-1

m-1

m-5

-1

2

1

-2

m+1

$m + 1 = -5 \therefore m = -6$

29. x^8 을 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$ 이고, $q_1(x)$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$ 일 때, $\frac{r_2}{r_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{8}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ 16
- ④ 21
- ⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \dots\dots\dots ①$

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \dots\dots\dots ②$

①에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8, r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2}$
 $= (x^7 + 2x^6 + \dots + 2^7)$

②에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2}, r_2 = (q_1(2))^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore r_2 = 2^{20}$

따라서, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

30. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이다. 다항식 $xf(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

- ① $2xQ(x)-2, -1$ ② $2xQ(x)-1, -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2, 1$ ④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1, 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1, 2$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x-1)Q(x)-2 \\&= \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\&= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\&= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1\end{aligned}$$

31. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누면 나누어 떨어지고, $x-3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

- ① $\frac{1}{2}(x^2+1)$ ② $\frac{1}{3}(x^2+1)$ ③ $\frac{1}{5}(x^2+1)$
④ $2x^2-3x+1$ ⑤ $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)Q_1(x) \\ f(x) &= (x-3)Q_2(x)+5 \\ \therefore f(3) &= 5 \\ f(x) &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x^2+1)(x-3)Q_3(x)+a(x^2+1) \\ (\because f(x) \text{는 } x^2+1 \text{로 나누어 떨어지므로}) \\ &= (x^2+1)((x-3)Q_3(x)+a) \\ x=3 \text{을 대입하면 } f(3) &= 10a=5 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2+1) \end{aligned}$$

32. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2 로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$ 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 하면 $R(0)$ 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ -2 ④ 1 ⑤ -4

해설

$R(x)$ 는 삼차 이하의 다항식이므로
 $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면
 $f(x) = (x+2)(x-1)Q_1(x) + 16 \cdots \textcircled{1}$
 $f(x) = (x^2+2x+2)Q_2(x) - 11x + 2$
 $f(x) = (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $= (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + (ax+k)(x^2+2x+2) - 11x + 2$
 $= (x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x) + ax+k\}$
 $- 11x + 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $f(1) = 16 = 5(a+k) - 11 + 2$
 $\therefore a+k = 5 \cdots \textcircled{3}$
 $f(-2) = 16 = 2(-2a+k) + 22 + 2$
 $\therefore -2a+k = -4 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $a = 3, k = 2$
따라서
 $R(x) = (3x+2)(x^2+2x+2) - 11x + 2$
 $\therefore R(0) = 6$

33. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

34. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)g(x) + ax^2 + bx + c$ 로 두면 $x^2 + 1$ 로 나누었을 때의 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + bx + c - a \text{에서}$$

$$bx + c - a = x + 1$$

$$\therefore b = 1, c - a = 1$$

또, $f(1) = a + b + c = 4$ 이므로

$$c - 1 + 1 + c = 4 \text{에서 } c = 2$$

35. 다항식 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지고 $x+4$ 로 나누면 3이 남는다. $f(x)$ 를 $(x+2)^2(x+4)$ 로 나눌 때, 나머지를 구하면?

- ㉠ $\frac{3}{4}(x+2)^2$ ㉡ $\frac{3}{2}(x+2)^2$ ㉢ $3(x+2)^2$
㉣ $(x+2)(x+4)$ ㉤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 라 놓으면 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$ax^2 + bx + c = a(x+2)^2$$

$$\therefore f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + a(x+2)^2$$

또 $f(x)$ 를 $(x+4)$ 로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4) = 3$

$$\therefore 4a = 3, a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지는 } \frac{3}{4}(x+2)^2$$

36. 4차의 다항식 $f(x)$ 가 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4},$
 $f(4) = \frac{4}{5}$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ $\frac{5}{6}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
 $f(n) = \frac{n}{n+1} (n = 0, 1, 2, 3, 4)$
 $(n+1)f(n) - n = 0$
 $g(x) = (x+1)f(x) - x$ 로 놓으면
 $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$ 는 다항식이므로 나머지정리에 의해
 $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$ 가 4차식이므로 $g(x)$ 는 5차식이다.
 $\therefore g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots \textcircled{1}$
그런데, $g(-1) = 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
 $\therefore a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
 $g(x) = (x+1)f(x) - x$
 $= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
 $g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
 $\therefore f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

37. n 이 양의 정수일 때, $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$8 = x$ 라 하면 $8^{100n} - 1 = x^{100n} - 1$ 이고 $9 = x + 1$ 이 된다.
 $x^{100n} - 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면
 $x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x) + R$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $R = 0$
 $\therefore x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x)$
위의 식에 $x = 8$ 을 대입하면 $8^{100n} - 1 = 9Q(x)$ 이므로 $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는 0이다.

38. 다항식 $f(x)$ 는 다항식 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $Q(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는?

- ① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$
- ② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$
- ③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$
- ④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$
- ⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) \cdots \textcircled{\text{A}}$$
$$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$$

$r(x)$ 가 $g(x)$ 보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$ 는 $\{g(x)\}^2$ 보다 낮은 차수이다.

따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$ 이고 몫은 $h(x)$ 이다.

39. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
 $f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
 $\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x, f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 27 = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
 $a = -6, b = 12, c = -6$
 $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
 $\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$