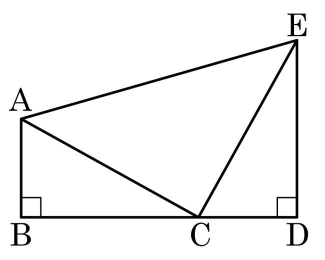
1. 다음 그림에서 두 직각삼각형 ABC 와 CDE 는 합동이고, 세 점 B, C, D 는 일직선 위에 있다.$\overline{\mathrm{AB}} = 5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{DE}} = 9\,\mathrm{cm}$ 일 때, $\triangle\mathrm{ACE}$ 의 넓이는?

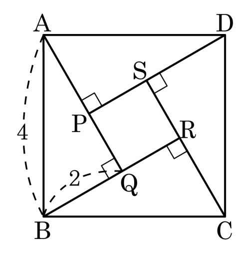


① 49 ② 50 ③ 51 ④ 52 ⑤ 53

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{BC}} = 9$ 이므로
$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$ 이다.
$\triangle\mathrm{ACE}$ 이 $\angle\mathrm{ACE} = 90°$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\triangle\mathrm{ACE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{106} \times \sqrt{106} = 53$
따라서 $\triangle\mathrm{ACE} = 53$ 이다.

2. 다음 그림의 정사각형 ABCD 에서 네 개의 직각삼각형이 합동일 때, 정사각형 PQRS 의 한 변의 길이는?



① $2(\sqrt{2}-1)$　② $2(\sqrt{3}-1)$　③ $3(\sqrt{2}-1)$

④ $3(\sqrt{3}-1)$　⑤ 3

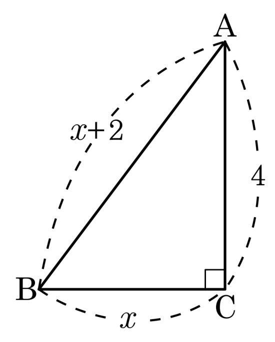
해설

$\overline{AP} = \overline{BQ} = 2$, $\overline{AQ} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = 2\sqrt{3} - 2$

$\therefore$ □PQRS 의 한 변의 길이는 $2(\sqrt{3}-1)$ 이다.

3. 다음은 직각삼각형 ABC 를 그린 것이다. x 의 값으로 적절한 것은?

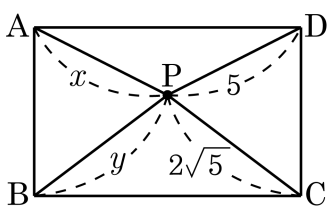


① 2 ② 2.5 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5.5

해설

$(x+2)^2 = x^2 + 4^2$
$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16$
$4x = 12$
$\therefore x = 3$

4. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 내부에 점 P 가 있을 때, x^2-y^2 의 값을구하여라.

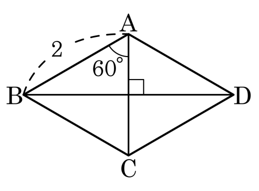


① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+(2\sqrt{5})^2=y^2+5^2$, $x^2-y^2=25-20=5$ 이다.

5. 다음 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가 2 인 마름모이다. □ABCD 의 넓이는?



① 2　② $2\sqrt{3}$　③ 4

④ $4\sqrt{3}$　⑤ $8\sqrt{3}$

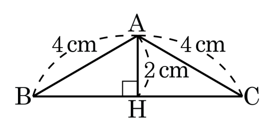
해설

대각선의 교점을 H 라 하면 △ABH 에서

$\overline{AH} = 1$, $\overline{BH} = \sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AC} = 2$, $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ □ABCD $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

6. 다음 그림의 $\overline{AB}=\overline{AC}=4\,\text{cm}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{AH}=2\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면?

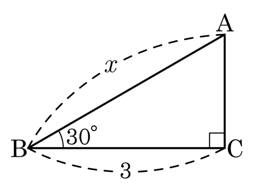


① $5\sqrt{3}\,\text{cm}$　② $4\sqrt{3}\,\text{cm}$　③ $3\sqrt{3}\,\text{cm}$
④ $2\sqrt{3}\,\text{cm}$　⑤ $\sqrt{3}\,\text{cm}$

해설

$\overline{BH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}(\text{cm})\ \therefore \overline{BC}=4\sqrt{3}(\text{cm})$

7. 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x 의 값을 구하면?



① 5 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

해설
$x : 3 = 2 : \sqrt{3}$
$x = 2\sqrt{3}$

8. 두 점 사이의 거리가 가장 짧은 것은 어느 것인가?

① $(1,\ 1),\ (2,\ 3)$ ② $(-3, -2),\ (0,\ 0)$

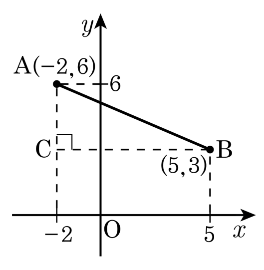
③ $(-2,\ 0),\ (0,\ 5)$ ④ $(2,\ 1),\ (3, -5)$

⑤ $(-4,\ 4),\ (2, -2)$

해설

① $\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{5}$
② $\sqrt{(-3-0)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{13}$
③ $\sqrt{(-2-0)^2+(0-5)^2} = \sqrt{29}$
④ $\sqrt{(3-2)^2+(-5-1)^2} = \sqrt{37}$
⑤ $\sqrt{(-4-2)^2+(4+2)^2} = \sqrt{72}$

9. 아래 그림을 보고 옳지 못한 것을 찾으면?



① 점 C 의 좌표는 $(-2,\ 3)$ 이다.

② 선분 AC 의 길이는 $6-3=3$ 이다.

③ 선분 CB 의 길이는 $5-(-2)=7$ 이다.

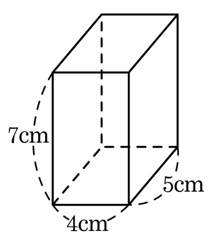
④ 선분 AO 의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이다.

⑤ 선분 AB 의 길이는 $\sqrt{58}$ 이다.

해설

선분 AO 의 길이는 $2\sqrt{10}$ 이다.

10. 다음 그림의 직육면체의 대각선의 길이는 몇 cm 인가?



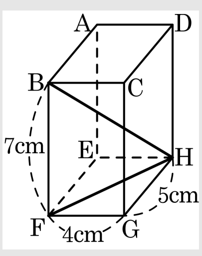
① $4\sqrt{10}$ cm ② 5 cm

③ $3\sqrt{10}$ cm ④ 3 cm

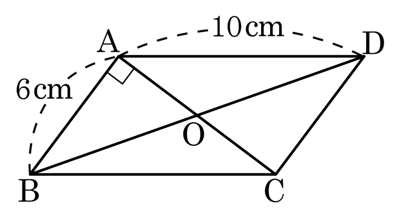
⑤ $7\sqrt{10}$ cm

해설

$\therefore\ \overline{BH} = \sqrt{7^2+4^2+5^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ (cm)



11. 평행사변형 ABCD 에서 $\angle BAC = 90°$ 이고, $\overline{AB} = 6cm$, $\overline{AD} = 10cm$ 일 때, 대각선 BD 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $4\sqrt{13}$ cm

해설

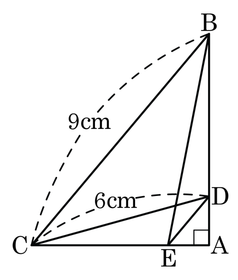
$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(cm)$, $\therefore \overline{AO} = 4(cm)$

$\triangle ABO$ 에서

$\overline{BO} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}(cm)$

$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{13}(cm)$

12. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{CD} = 6\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 9\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{BE}^2 - \overline{DE}^2$ 의 값을 구하여라.(단, 단위는 생략)



▶ 답 :

▷ 정답 : 45

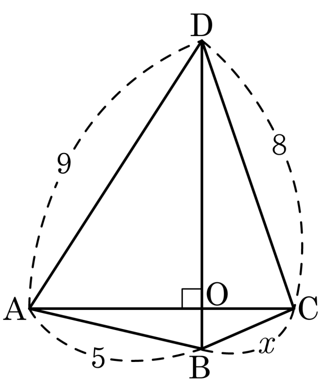
해설

$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \left\{(9^2 - \overline{AC}^2)\right\}$,

$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \left\{(6^2 - \overline{AC}^2)\right\}$

$\overline{BE}^2 - \overline{DE}^2 = 9^2 - 6^2 = 45$

13. 다음 그림처럼$\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=5, \overline{\mathrm{CD}}=8, \overline{\mathrm{AD}}=9$ 일 때, x 의 값으로 적절한 것을 고르면?



① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

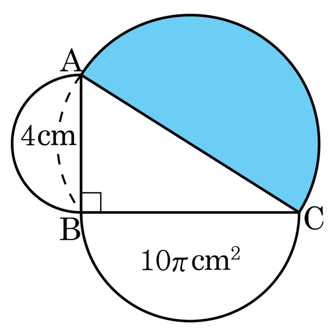
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$ 이므로

$5^2+8^2=9^2+x^2$

$25+64=81+x^2$

$x^2=8, x>0$이므로 $x=2\sqrt{2}$

14. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$, $\overline{AB} = 4\,\mathrm{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 각 변을 지름으로 하는 세 반원을 그렸다. $\overline{BC}$ 를 지름으로 하는 반원의 넓이가 $10\pi\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\pi\,\mathrm{cm}^2}$

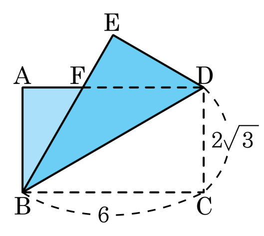
▷ 정답 : 12 $\underline{\pi\,\mathrm{cm}^2}$

해설

반지름 r 인 원의 넓이는 $r^2\pi$ 이므로 지름이 4cm 인 반원의 넓이는 $2^2\pi \times \frac{1}{2} = 2\pi(\mathrm{cm}^2)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $10\pi + 2\pi = 12\pi(\mathrm{cm}^2)$ 이다.

15. 다음 그림은 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 를 대각선 BD 를 접는 선으로 하여 접은 것이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\angle DBC = \angle DBE$　　② $\angle FBD = \angle FDB$

③ $\angle E = 90°$　　④ $2\overline{AF} = \overline{FD}$

⑤ $\triangle EFD = 4\sqrt{3}$

해설

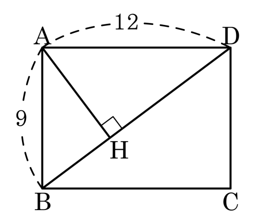
$\angle DBC = \angle DBE$
$\angle DBC = \angle ADB \left(\because \overline{AD} /\!/ \overline{BC}\right)$

따라서 $\triangle FBD$ 는 이등변 삼각형이다.
$\overline{FD} = \overline{FB} = x$ 라 하면, $\triangle EFD$ 에서 $\overline{EF} = 6 - x$ 이므로

$(6-x)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = x^2 \qquad \therefore\ x = 4$

$\triangle EFD = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

16. 다음 그림에서 직사각형 ABCD 의 점 A 에서 대각선 BD 까지의 거리는?



① 18　② 36　③ $\frac{12}{5}$　④ $\frac{18}{5}$　⑤ $\frac{36}{5}$

해설

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$

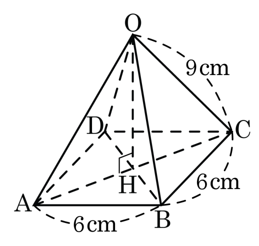
점 A 와 대각선 BD 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AH}}$

$\triangle$ABD 의 높이이므로

$\triangle$ABD 의 넓이는 $9 \times 12 \times \frac{1}{2} = 15 \times \overline{\mathrm{AH}} \times \frac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}} = \frac{36}{5}$

17. 다음과 같은 정사각뿔의 높이와 부피를 각각 구하면?



① $2\sqrt{7}\,\mathrm{cm}, 15\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^3$

② $2\sqrt{7}\,\mathrm{cm}, 20\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^3$

③ $2\sqrt{7}\,\mathrm{cm}, 27\sqrt{7}\,\mathrm{cm}^3$

④ $3\sqrt{7}\,\mathrm{cm}, 30\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^3$

⑤ $3\sqrt{7}\,\mathrm{cm}, 36\sqrt{7}\,\mathrm{cm}^3$

해설

정사각뿔의 높이를 h, 부피를 V라 하면

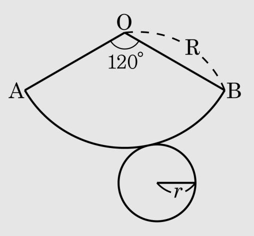
$h = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{81 - 18} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}(\mathrm{cm})$

$V = \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 3\sqrt{7} = 36\sqrt{7}(\mathrm{cm}^3)$

18. 호 AB 의 길이는 4π 이고 중심각의 크기가 $120°$ 인 원뿔의 전개도가 있다. 이 원뿔의 부피를 구하면?

① $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi\text{cm}^3$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi\text{cm}^3$ ③ $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi\text{cm}^3$
④ $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi\text{cm}^3$ ⑤ $16\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$

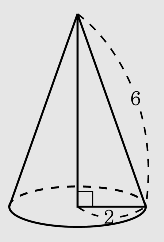
해설



호 AB 의 길이, 밑면의 둘레의 길이가 $2\pi r = 4\pi$ 이므로 밑면의 반지름의 길이 $r = 2(\text{m})$ 이다.

부채꼴 호의 길이 $l = 2\pi \text{R} \times \frac{120°}{360°} = 2\pi \text{R} \times \frac{1}{3} = 4\pi$ 이므로

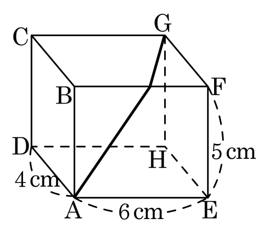
부채꼴의 반지름의 길이 $\text{R} = 6(\text{cm})$ 이다.
위의 전개도로 다음과 같은 원뿔이 만들어진다.



원뿔의 높이 $h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$ 이다.

원뿔의 부피 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \pi \times 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi(\text{cm}^3)$ 이다.

19. 다음 직육면체에서 점 A 를 출발점으로 하여 변 BF 를 지나 점 G 에 도착하는 최단 거리는?

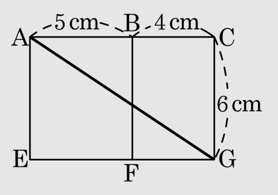


① $\sqrt{13}$ cm ② $2\sqrt{13}$ cm

③ $2\sqrt{14}$ cm ④ $3\sqrt{13}$ cm

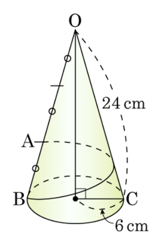
⑤ $3\sqrt{14}$ cm

해설



$\overline{AG} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}(\text{cm})$

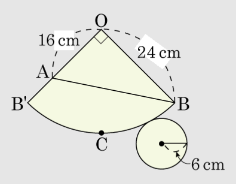
20. 다음 그림은 모선의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 이고, 반지름의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$ 인 원뿔이다. 점 B 에서부터 출발하여 모선 OC 를 거쳐 모선 OB 의 $\frac{1}{3}$ 지점인 A 까지 가는 최단거리를 구하여라.



▶ 답: ______ cm

▷ 정답: $8\sqrt{13}$ cm

해설



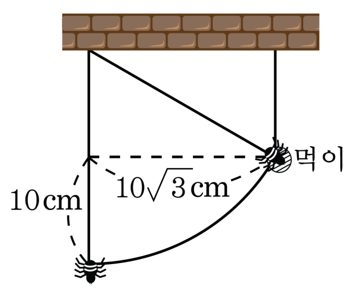
최단거리는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이와 같다.

5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BB'}} = 2\pi \times 6 = 12\pi(\mathrm{cm})$

$\angle \mathrm{B'OB} = \frac{12\pi}{48\pi} \times 360° = 90°$

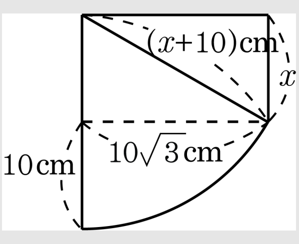
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{24^2 + 16^2} = \sqrt{832} = 8\sqrt{13}(\mathrm{cm})$

21. 천정에 매달려 있던 거미가 먹이를 먹기 위해 그림과 같이 움직였습니다. 먹이가 천정으로부터 떨어져 있는 거리는?



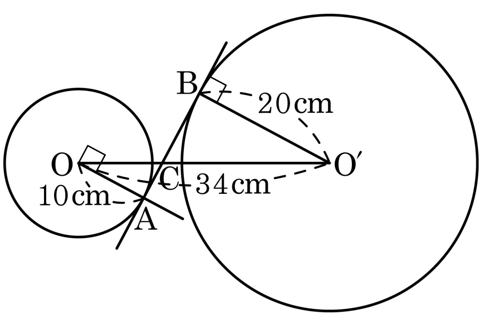
① 6 cm　② 7 cm　③ 8 cm　④ 9 cm　⑤ 10 cm

해설



간단하게 그리면 위의 그림과 같으므로 피타고라스 정리에 의해
$x^2 + (10\sqrt{3})^2 = (x+10)^2$ 이므로,
$300 = 20x + 100$
$\therefore x = 10$ 이다.

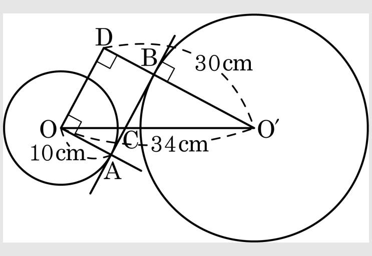
22. 다음 그림에서 반지름의 길이가 $10\,\mathrm{cm}$, $20\,\mathrm{cm}$ 인 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리는 $34\,\mathrm{cm}$ 이다. 공통접선 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 16 cm

해설

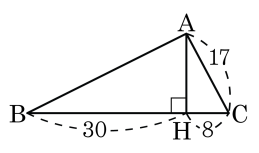


$\overline{\mathrm{O'B}}$ 의 연장선과 점 O 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 에 평행하게 그은 직선이 만나는 점을 D 라 하면

$\overline{\mathrm{O'D}} = 20 + 10 = 30(\mathrm{cm})$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OD}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2 - \overline{\mathrm{O'D}}^2} \\ &= \sqrt{34^2 - 30^2} = \sqrt{256} \\ &= 16(\mathrm{cm})\end{aligned}$$

23. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

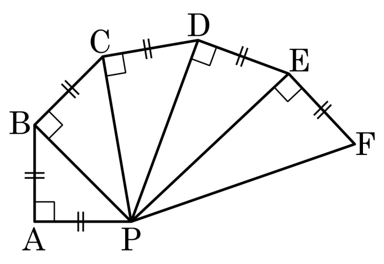
▷ 정답 : $15\sqrt{5}$

해설

$\overline{AH} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$

$\overline{AB} = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{225 + 900} = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$

24. $\overline{AP} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = 2$ 일 때, 다음 그림에서 길이가 4 가 되는 선분은?



① $\overline{PB}$ ② $\overline{PC}$ ③ $\overline{PD}$ ④ $\overline{PE}$ ⑤ $\overline{PF}$

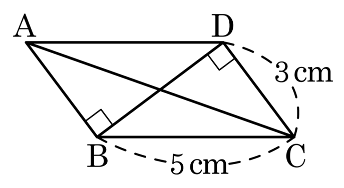
해설

$\overline{PB} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\overline{PC} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{PD} = \sqrt{16} = 4$, $\overline{PE} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

이므로 길이가 4 인 선분은 $\overline{PD}$ 이다.

25. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{BC} = 5\text{cm}$, $\overline{CD} = 3\text{cm}$ 일 때, $\overline{AC} + \overline{BD}$ 의 값은?



① $(2\sqrt{13} + 2)\,\text{cm}$　　② $(4\sqrt{13} + 2)\,\text{cm}$

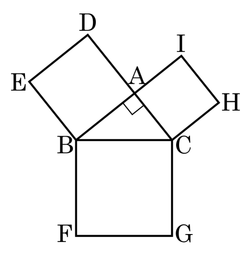
③ $(2\sqrt{13} + 4)\,\text{cm}$　　④ $(4\sqrt{13} + 4)\,\text{cm}$

⑤ $10\,\text{cm}$

해설

삼각형 BCD 에서 피타고라스 정리에 따라
$5^2 = 3^2 + \overline{BD}^2$
$\overline{BD} > 0$ 이므로 $\overline{BD} = 4\,\text{cm}$ 이다.
평행사변형의 대각선은 다른 대각선을 이등분하므로
대각선끼리의 교점을 O 라 할 때,
삼각형 ABO 에 대해서
$\overline{AB} = 3\,\text{cm}$, $\overline{BO} = 2\,\text{cm}$
피타고라스 정리에 의해서 $\overline{AO} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}(\text{cm})$
$\therefore \overline{AC} + \overline{BD} = (4 + 2\sqrt{13})\,\text{cm}$ 이다.

26. 다음 그림은 직각삼각형 ABC 의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. $\triangle$ABC 의 넓이가 10 이고 □ADEB 의 넓이가 25 일 때, 두 정사각형 BFGC, ACHI 의 넓이의 차를 구하면?



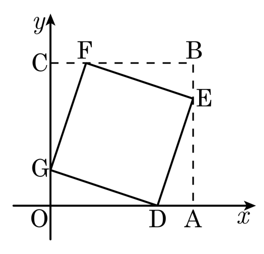
① 21　② 22　③ 23

④ 24　⑤ 25

해설

□ADEB + □ACHI = □BFGC
□BFGC − □ACHI = □ADEB
따라서 구하는 넓이는 □ADEB = 25 이다.

27. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 한 변의 길이가 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 인 정사각형 DEFG 가 있고, $\overline{\mathrm{OD}}$ 의 길이는 $\overline{\mathrm{AD}}$ 의 길이보다 3 배 길다고 할 때, 점 D 와 점 F 를 지나는 그래프의 y 절편은?



① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$\overline{\mathrm{OD}} = 3\overline{\mathrm{AD}}$ 이므로 $\mathrm{D} = (a, 0)$ 이라고 하면

$\mathrm{G} = \left(0, \frac{1}{3}a\right)$

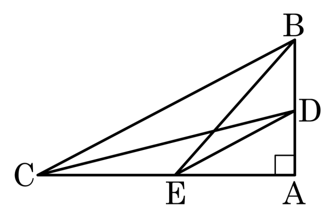
이를 피타고라스 정리에 대입하면

$\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{10a^2}{9}$ 이 되어 $a = \sqrt{2}$가 성립한다.

$\mathrm{D}(\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$를 지나는 함수의 식을 구하면 $f(x) = -2x + 2\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 함수 f 의 y 절편은 $2\sqrt{2}$ 이다.

28. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{DE} = 3, \overline{BE} = 4, \overline{CD} = 6$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.



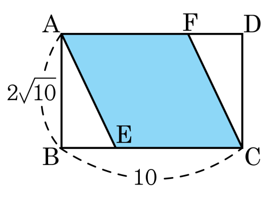
▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{43}$

해설

$\overline{BC}^2 + 3^2 = 4^2 + 6^2$
$\therefore \overline{BC} = \sqrt{43}$

29. 다음 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AE} = \overline{CE}$ 가 되도록 점 E 를 잡고, $\overline{AE} = \overline{AF}$ 가 되도록 점 F 를 잡을 때, □AECF 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $14\sqrt{10}$

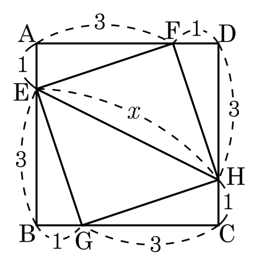
해설

$\overline{CE} = x$ 라 하면

$x^2 = (2\sqrt{10})^2 + (10 - x)^2 \quad \therefore \quad x = 7$

$\therefore$ □AECF $= 7 \times 2\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$

30. 한 변의 길이가 4 인 정사각형 ABCD 의 각 변에 그림과 같이 네 점 E, F, H, G 를 잡을 때, □EFHG 의 대각선 EH 의 길이를 구하면?



① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4

④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

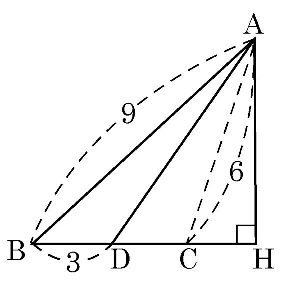
해설

네 직각삼각형이 서로 합동이므로 □EFHG 는 정사각형이다.

$\overline{\mathrm{FE}} = \overline{\mathrm{FH}} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\therefore\ x = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2} = 2\sqrt{5}$

31. 다음 그림과 같이 $\angle C$ 가 둔각인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=9$, $\overline{AC}=6$ 이고, $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하면 $\overline{BD}=3$ 이다. 이때, 점 A 에서 변 BC 의 연장선에 내린 수선 $\overline{CH}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\triangle BAD=\angle CAD$ 이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

$9:6=3:\overline{DC}$ $\therefore$ $\overline{DC}=2$

$\triangle ACH$ 에서 $\overline{AH}^2=6^2-\overline{CH}^2 \cdots$ ㉠

마찬가지로 $\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH}^2=9^2-(5+\overline{CH})^2 \cdots$ ㉡

㉠ = ㉡ 에서

$6^2-\overline{CH}^2=9^2-(5+\overline{CH})^2$, $\quad 10\times\overline{CH}=20$

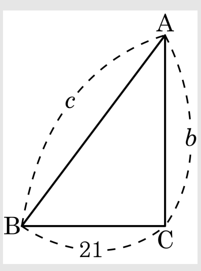
$\overline{CH}=2$

32. 세 변의 길이가 모두 자연수이고, $\angle C = 90°$, $\overline{BC} = 21$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ 인 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 294

해설



위의 그림의 $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ 라 하자. (단, b, c는 자연수이다.)

$c^2 = 21^2 + b^2$, $c^2 - b^2 = 21^2$

$(c-b)(c+b) = 3^2 \times 7^2$

그런데 $\triangle ABC$ 의 넓이, 즉 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times b \times 21$ 이 최소가 되려면 b 의 값이 최소가 되어야 한다.

따라서 $c+b > c-b$ 인 경우를 순서쌍 $(c+b,\ c-b)$ 로 나타내어 보면

$$(c+b,\ c-b) = (7^2,\ 3^2),\ (7^2 \times 3,\ 3),\ (7 \times 3^2,\ 7),\ (7^2 \times 3^2,\ 1)$$

이때, b 의 값이 최소가 되는 경우는

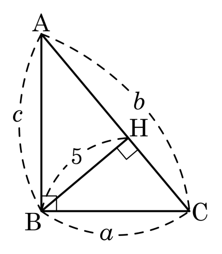
$c + b = 7 \times 3^2$, $c - b = 7$ 이다.

$\therefore\ c = 35,\ b = 28$ ($b > 21$ 에 만족한다.)

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2} \times 21 \times 28 = 294$ 이다.

33. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, $a+b+c=10$, $\overline{BH} = 5\,cm$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하면?



① $25\,cm^2$　　② $\frac{25}{2}\,cm^2$　　③ $\frac{25}{3}\,cm^2$

④ $5\,cm^2$　　⑤ $10\,cm^2$

해설

$(a+c) = 10-b$ 이므로 양변 제곱을 하면 $(a+c)^2 = (10-b)^2$

$a^2 + 2ac + c^2 = b^2 - 20b + 100$ 피타고라스 정리에 의해서

$b^2 = a^2 + c^2$ 을 이용하면

$b^2 + 2ac = b^2 - 20b + 100$ 이므로

$2ac + 20b = 100 \cdots (1)$

또한 $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BH}$ 에서

$5b = ac \cdots (2)$

(1) 에 (2) 를 대입하면

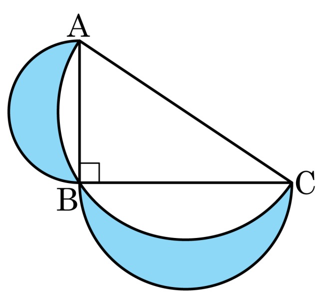
$30b = 100$ 에서

$b = \frac{100}{30}$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 5b = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}(cm^2)$

34. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$, $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$ 인 직각삼각형 ABC 의 세 변을 각각 지름으로 하는 반원을 그렸더니 색칠한 부분의 넓이가 24 였다. 이때 변 AC 의 길이를 구하여라.



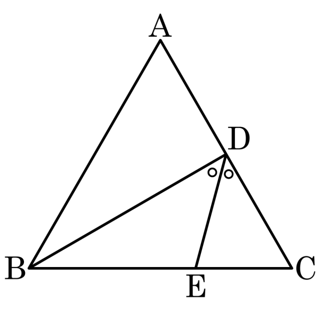
▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{26}$

해설

$\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = 3a$ 라 하면
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 지름으로 하는 세 반원의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하면
(색칠한 부분의 넓이)
$= S_1 + S_2 + \triangle ABC - S_3$
$= \triangle ABC$ ($\because$ $S_1 + S_2 = S_3$)
$= \frac{1}{2} \times 2a \times 3a = 3a^2$
즉, $3a^2 = 24$ 이므로 $a = 2\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = \sqrt{(2a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{13}a = 2\sqrt{26}$ 이다.

35. 정삼각형 ABC 의 ∠B 의 이등분선이 변 AC 와 만나는 점을 D , ∠BDC 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 E 라 하자. 삼각형 BED 의 넓이가 $\sqrt{3}$ 일 때, 정삼각형 ABC 의 넓이를 구하여라.

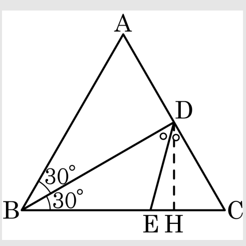


▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{3}+2$

해설

삼각형 ABC 의 한 변의 길이를 a 라 할 때,



△ABD 의 세 내각의 크기는 30°, 60°, 90° 이므로 $a : \overline{\mathrm{BD}} = 2 : \sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{DC}} = a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$

$\overline{\mathrm{BE}} = x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{CE}}$ 에서

$\frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = x : (a-x)$ 점 D 에서 내린 수선의 발을 H 라 하면,

$\therefore x = \frac{a}{2}(3-\sqrt{3})$

△BDH 의 세 내각의 크기는 30°, 60°, 90° 이므로

$\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DH}} = 2 : 1$ 에서

$\overline{\mathrm{DH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{DEB} &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BE}} \times \overline{\mathrm{DH}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{2}(3-\sqrt{3}) \times \frac{a\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3}{16}a^2(\sqrt{3}-1) \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$a^2 = \frac{8}{3}(3+\sqrt{3})$

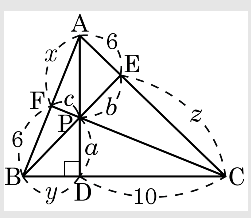
$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{8}{3}(3+\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3}+2\end{aligned}$$

36. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A, B, C 에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 할 때, $\overline{AE} = 6$, $\overline{BF} = 6$, $\overline{CD} = 10$ 이다. 이때 $\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 172

해설



다음 그림과 같이 세 수선의 교점을 P 라 하면

$\triangle$PAF 와 $\triangle$PAE 에서 $x^2 + c^2 = 6^2 + b^2 \cdots ①$

$\triangle$PBF 와 $\triangle$PBD 에서 $y^2 + a^2 = 6^2 + c^2 \cdots ②$

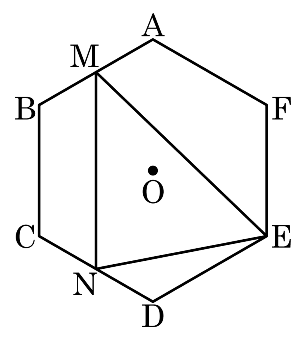
$\triangle$PDC 와 $\triangle$PCE 에서 $z^2 + b^2 = 10^2 + a^2 \cdots ③$

①, ②, ③을 변끼리 더하면

$x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 + 6^2 + 10^2 = 172$

따라서 $\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = 172$ 이다.

37. 다음과 같이 정육각형 ABCDEF 에서 변 AB, CD 의 중점을 각각 M, N 이라 하면 삼각형 EMN 의 넓이가 27 일 때, 정육각형 ABCDEF 의 넓이를 구하여라.

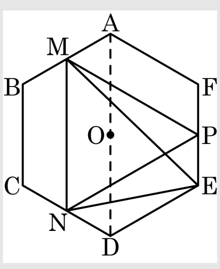


▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

정육각형의 한 변의 길이를 a 라 하자.
다음 그림과 같이 선분 AD 를 그으면 □ABCD 는 등변사다리꼴이므로 $\overline{BC} = a$, $\overline{AD} = 2a$ 이다.

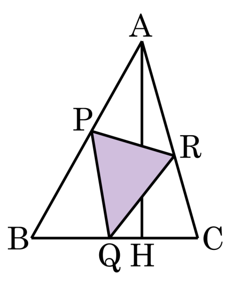


따라서 사다리꼴의 중점연결 정리에 의하여 $\overline{MN} = \frac{1}{2}(a+2a) = \frac{3}{2}a$ 이다.
$\overline{EF}$ 의 중점을 P 라 할 때, $\overline{EF} \,/\!/\, \overline{MN}$ 이므로 $\triangle MNP = \triangle MNE$,
$\triangle MNP$ 는 한 변의 길이가 $\frac{3}{2}a$ 인 정삼각형이므로 $\triangle MNP = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}a^2$

$\therefore\ \triangle EMN = \frac{9\sqrt{3}}{16}a^2 = 27$, $a^2 = 16\sqrt{3}$

정육각형 ABCDEF 는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형 6 개로 나누어지므로 정육각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 16\sqrt{3} = 72$ 이다.

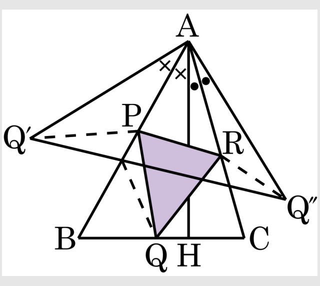
38. 다음과 같이 $\angle A = 45°$ 인 예각삼각형 ABC 의 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{AH} = 8$ 이다. 삼각형 ABC 에 내접하는 삼각형 PQR 의 둘레의 길이가 최소일 때, $\angle AQB$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 : ______ °

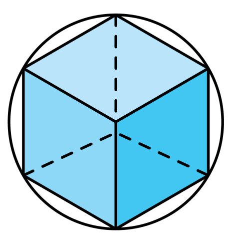
▷ 정답 : 90 °

해설



위의 그림과 같이 점 Q 의 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 대한 대칭점을 각각 Q′, Q″ 라 하면
$\overline{PQ} = \overline{PQ'}$, $\overline{RQ} = \overline{RQ''}$
$\angle Q'AQ'' = 2(\bullet + \times) = 90°$ 이고,
$\triangle PQR$ 의 둘레의 길이는
$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{PQ'} + \overline{Q''R} + \overline{RP} \geq \overline{Q'Q''}$
그런데 $\overline{AQ'} = \overline{AQ''} = \overline{AQ}$ 이므로 $\overline{AQ}$ 가 최소일 때, 즉 $\overline{AQ}$ 가 점 A 에서 변 BC 에 내린 수선일 때, $\overline{Q'Q''}$ 가 최소가 된다.
따라서 $\angle AQB = \angle AHB = 90°$ 이다.

39. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정육면체에 외접하는 구의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

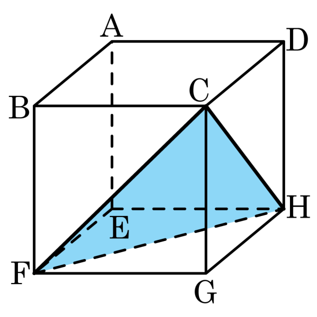
▷ 정답 : $4\sqrt{3}$ cm

해설

정육면체에 외접하는 구의 중심은 정육면체의 두 대각선의 교점이므로 구의 반지름은 대각선의 길이의 반이다.

$$\begin{aligned}(\text{반지름}) &= \frac{1}{2} \times (\text{대각선의 길이}) \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{8^2 + 8^2 + 8^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

40. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12 인 정육면체의 한 꼭짓점 A 에서 삼각형 CFH 에 내린 수선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $8\sqrt{3}$

해설

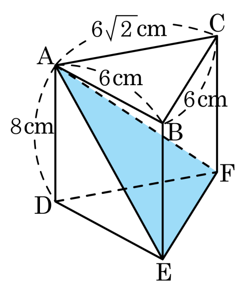
입체도형 A – CFH 는 한 모서리의 길이가 $12\sqrt{2}$ 인 정사면체이고 꼭짓점 A 에서 밑면 CFH 에 내린 수선의 발을 P 라 하면 점 P 는 $\triangle$CFH 의 무게중심이다.

즉, $\overline{CP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 12\sqrt{2} \times \dfrac{2}{3} = 4\sqrt{6}$

따라서 $\triangle$ACP 에서

$\overline{AP} = \sqrt{(12\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{6})^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ 이다.

41. 다음 그림과 같은 삼각기둥에서 $\overline{AB} = \overline{BC} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 8\,\text{cm}$ 일 때, $\triangle AEF$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답 : $30\,\underline{\text{cm}^2}$

해설

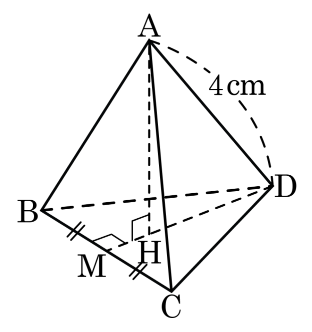
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{AE} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$\square ADEB \perp \square BEFC$ 이므로 $\overline{AE} \perp \overline{EF}$

$$\therefore\ \triangle AEF = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ (\text{cm}^2)$$

42. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4cm 인 정사면체의 꼭짓점 A 에서 밑면에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{DM}$ 의 길이, $\overline{DH}$ 의 길이, $\overline{AH}$ 의 길이를 차례로 나열한 것은?



① $\sqrt{3}$cm , $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .
② $\sqrt{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .
③ $2\sqrt{3}$cm , $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .
④ $2\sqrt{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .
⑤ $2\sqrt{3}$cm , $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$cm , $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .

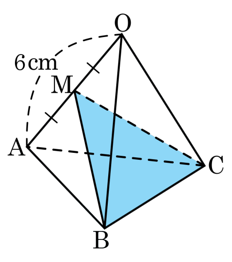
해설

$(\overline{CD})^2 = (\overline{MC})^2 + (\overline{DM})^2$, $(\overline{DM})^2 = 16 - 4 = 12$, $\overline{DM} = 2\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

$\overline{DH} = 2\sqrt{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(\mathrm{cm})$

$(\overline{AH})^2 = (\overline{AD})^2 - (\overline{DH})^2 = 16 - \dfrac{48}{9} = \dfrac{96}{9} = \dfrac{32}{3}$, $\overline{AH} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$cm .

43. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6 cm 인 정사면체에서 $\overline{OA}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\triangle$MBC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답 : $9\sqrt{2}\,\underline{\text{cm}^2}$

해설

$\triangle$MBC 는 $\overline{BM} = \overline{CM} = 3\sqrt{3}$ (cm) 인 이등변삼각형

(높이) $= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$ (cm)

$\therefore$ ($\triangle$MBC의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2}$

$= 9\sqrt{2}$ (cm^2)

44. 부피가 $9\sqrt{2}$ 인 정팔면체의 겉넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $18\sqrt{3}$

해설

정팔면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하고 꼭짓점 A 에서 □BCDE 에 내린 수선의 발을 O 라 하면 △ABO 에서

$\overline{\mathrm{BO}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{BO}}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

정팔면체의 부피는

$2 \times$ (정사면체 A − BCDE의 부피) 이므로

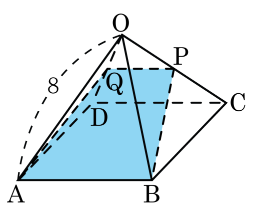
$2 \times \left(\frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = 9\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore\ a = 3$

즉, 정팔면체의 한 모서리의 길이는 3 이다.

따라서 정팔면체의 겉넓이는 $8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = 18\sqrt{3}$ 이다.

45. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 8 인 정사각뿔에서 P, Q 는 각각 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ 의 중점일 때, □QABP 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{11}$

해설

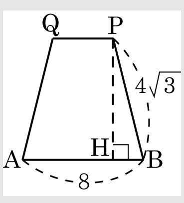
□QABP 는 $\overline{QP} \,//\, \overline{AB}$ 인 사다리꼴

$\overline{QP} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = 4$

△PHB 에서 $\overline{PB} = 4\sqrt{3}$, $\overline{HB} = 2$

$\therefore\ \overline{PH} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}$

□QABP $= (4+8) \times 2\sqrt{11} \times \dfrac{1}{2} = 12\sqrt{11}$



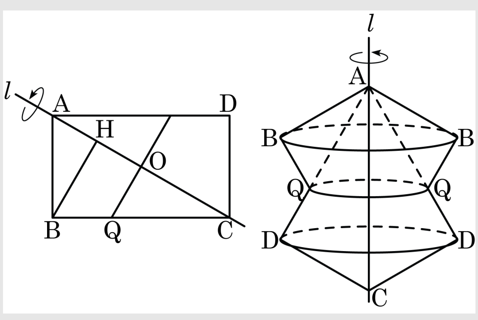
46. $\overline{AB}=5$, $\angle ACB=30°$ 인 직사각형 ABCD 의 대각선 AC 를 회전축으로 하여 1 회전시킨 회전체의 부피를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{875}{9}\pi$

해설

$\overline{AC}$ 의 중점을 O 라 하고, $\overline{AC}$ 의 수직이등분선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 Q 라 하면 구하는 회전체의 부피는 □ABQO 를 $\overline{AO}$ 를 축으로 하여 1 회전시킨 것의 2 배이다.



$\overline{AC}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2}=10$

점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle ADC \backsim \triangle BHA$ (AA 닮음) 이므로

$\overline{HA}=\frac{5}{2}$, $\overline{BH}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

또, $\triangle ADC \backsim \triangle COQ$ (AA 닮음) 이므로

$\overline{OQ}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AH}$ 를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_1 은

$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}=\frac{125}{8}\pi$,

$\overline{CH}$ 를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_2 는

$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{15}{2}=\frac{375}{8}\pi$,

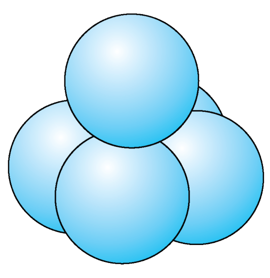
$\overline{CO}$ 를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_3 는

$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2\times 5=\frac{125}{9}\pi$ 이다.

따라서 구하는 회전체의 부피는

$2(V_1+V_2-V_3)=\frac{875}{9}\pi$ 이다.

47. 다음 그림과 같이 부피가 36π 인 구 5 개가 서로 외접하고 있을 때, 이 모양의 꼭대기부터 밑바닥까지의 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $6+3\sqrt{2}$

해설

구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times r^3=36\pi,\ r=3$

다섯 개의 구의 중심을 각각 O, P, Q, R, S 라 하면 밑면이 한 변의 길이가 6 인 정사각형 PQRS 인 정사각뿔을 그릴 수 있다. 이때 변 PQ 의 중점을 M, 정사각형 PQRS 의 두 대각선의 교점을 T 라 하면 $\overline{OM}$ 은 한 변의 길이가 6 인 정삼각형 OPQ 의 높이이므로 $\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$ 이다.

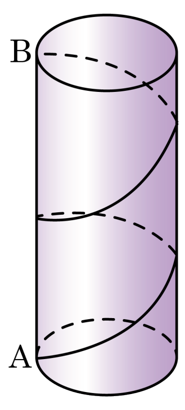
$\triangle$OMT 에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{OT}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 높이는 (구 O의 반지름의 길이) + $\overline{OT}$ + (구 Q의 반지름의 길이) 이므로

$3+3\sqrt{2}+3=6+3\sqrt{2}$ 이다.

48. 다음 그림과 같이 밑면의 둘레의 길이가 4 이고, 높이가 6 인 직원기둥의 겉면을 따라 A 에서 B 까지 두 바퀴 감은 실을 최단 길이를 구하여라.

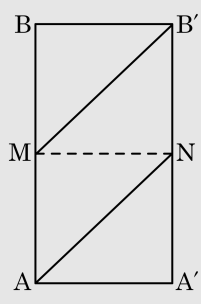


▶ 답 :

▷ 정답 : 10

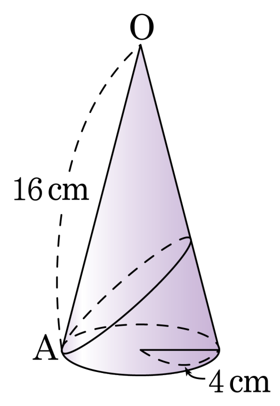
해설

$\overline{AB}$ 를 자르는 선으로 하여 옆면의 전개도를 그리면



$\overline{BB'} = 4$ 이고 두 번 감을 때 실의 최단 길이는 위의 그림과 같다.
$\overline{MB'} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
따라서 실의 최단 길이는 10 이다.

49. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4cm 이고 모선의 길이가 16cm 인 원뿔이 있다. 원뿔의 밑면의 한 점 A 에서 출발하여 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 점 A 로 돌아오는 최단 거리를 구하여라.



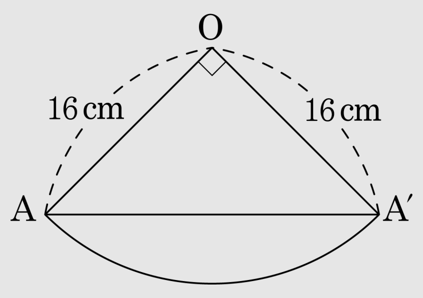
▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $16\sqrt{2}$ cm

해설

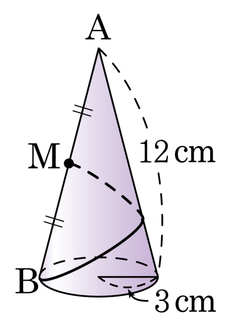
전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기는

$\frac{4}{16} \times 360° = 90°$,



최단거리 $\overline{AA'} = 16\sqrt{2}(\text{cm})$ 이다.

50. 다음 그림과 같이 모선의 길이가 12cm 이고, 밑면인 원의 반지름의 길이가 3cm 인 원뿔에서 모선 AB 의 중점을 M 이라 하자. 점 B 에서 원뿔의 옆면을 따라 점 M 에 이르는 최단 거리를 구하면?



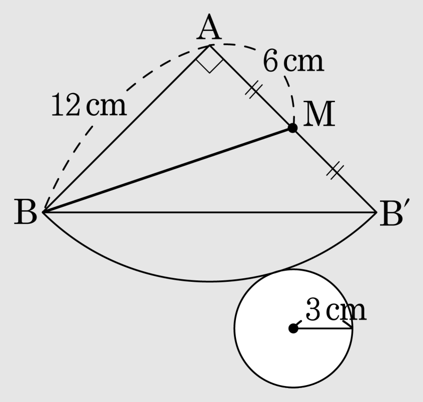
① $6\sqrt{5}$ cm ② $5\sqrt{6}$ cm ③ 5 cm
④ $5\sqrt{3}$ cm ⑤ $6\sqrt{2}$ cm

해설

전개했을 때 부채꼴의 중심각을 x 라 하면, 부채꼴의 호의 길이와 밑면의 둘레의 길이가 같으므로

$2\pi \times 12 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3$

$\therefore x = 90°$



$\therefore$ 최단 거리 $\overline{BM} = \sqrt{12^2+6^2} = 6\sqrt{5}$(cm) 이다.