1. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

=(n 의 일의 자리수)

$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$

2. 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 거스름돈 없이 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 모두 몇 가지인가? (단, 사용하지 않는 지폐가 있어도 된다.)

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐의 수를 각각 x, y, z라 하면

$10000x + 5000y + 1000z = 17000$

$\therefore 10x + 5y + z = 17$

(i) $x = 1$일 때, $5y + z = 7$이므로

(y, z)는 $(1, 2), (0, 7)$의 두 가지

(ii) $x = 0$일 때, $5y + z = 17$이므로

(y, z)는 $(3, 2), (2, 7), (1, 12), (0, 17)$의 4가지

(i), (ii)에서 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 $2 + 4 = 6$(가지)

3. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{(\text{나}})$ 임을 보인 것이다.

> 10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
> 이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 ($\boxed{\text{가}}$), 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 ($\boxed{\text{나}}$) 이다.
> 따라서 다음 등식이 성립한다.
> ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$ ② $5{}_9P_4$, ${}_9P_5$ ③ ${}_9P_4$, ${}_8P_5$

④ ${}_8P_4$, $4{}_9P_5$ ⑤ $4{}_9P_4$, ${}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 + {}_9P_5$

4. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 네 개의 숫자를 써서 네 자리의 정수를 만들 때, 짝수는 몇 개인가?

① 96　② 114　③ 128　④ 144　⑤ 156

해설

$\square\square\square 0 : {}_5P_3 = 60$

$\square\square\square 2 : 4 \times 4 \times 3 = 48$

$\square\square\square 4 : 4 \times 4 \times 3 = 48$

$\therefore 60 + 48 \times 2 = 156$

5. 12 개의 프로 야구팀이 다른 모든 팀과 각각 3 번씩경기를 치르는 리그전을 벌일 때, 전체 경기 수는?

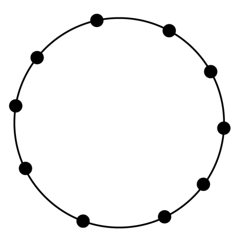
① 120 ② 144 ③ 168 ④ 198 ⑤ 200

해설

(12 개의 팀 중에서 2 개의 팀을 고르는 방법)×3

$= {}_{12}C_2 \times 3 = 198$

6. 다음 그림과 같이 원주 위에 10 개의 점이 있다. 이 중에서 2 개의 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수를 l , 3 개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 m , 4 개의 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수를 n 이라 할 때, $l+m+n$ 의값은?



① 315　　② 330　　③ 345　　④ 360　　⑤ 375

해설

원주 위의 10 개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로,

$l = {}_{10}\mathrm{C}_2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$

$m = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10!}{3!7!} = 120$

$n = {}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$

$\therefore\ l+m+n = 375$

7. 남자 6 명, 여자 2 명을 4 명씩 두 조로 나눌 때, 여자 2 명이 같은 조에 속하는 경우는 몇 가지인가?

① 14　② 15　③ 20　④ 22　⑤ 30

해설

여자 2 명을 제외한 남자 6 명을 2 명,
4 명으로 나누는 경우를 생각한다.
${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$

8. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

> (가) $1 \in A$
> (나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

> ㉠ 집합 A 는 유한집합이다.
> ㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.
> ㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여
$\sqrt{2} \in A,\ (\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^3 \in A,\ \cdots,$
즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A,\ (\sqrt{2})^4 \in A,\ (\sqrt{2})^6 \in A,\ \cdots,$
즉 $2 \in A,\ 2^2 \in A,\ 2^3 \in A,\ \cdots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)
집합 $A = \{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ (\sqrt{2})^2,\ (\sqrt{2})^3,\ \cdots\}$은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.
이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

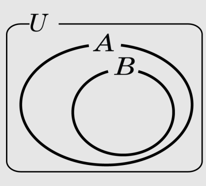
9. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^c \cap B = \varnothing$를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$	㉡ $A \cup B = B$	㉢ $A^c \subset B^c$
㉣ $A \cap B = B$	㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \varnothing$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \varnothing$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore\ B \subset A$



㉠ $A = B$는 $B \subset A$, $A \subset B$이므로 항상 성립하지 않는다.
㉢ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A^c \subset B^c$
㉣ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = B$ 이므로 성립한다.
㉤ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.
$\therefore$ 3개

10. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20\}$에 대하여 1 또는 2 또는 3을 포함하는 A의 부분집합의 개수는?

① $7\cdot 2^{17}$ ② $7\cdot 2^{17}-1$ ③ 2^{17}
④ $2^{17}-1$ ⑤ $2^{17}+1$

해설

구하는 부분집합은 A 의 부분집합 중에서 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합을 빼면 된다. A의 부분집합 중 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합은 2^{17} 개다.
$\therefore$ 구하는 부분집합의 개수는 $2^{20}-2^{17}=2^{17}(2^3-1)=7\cdot 2^{17}$

11. 어느 지역에서 ㉠신문을 보는 학생이 전체의 0.5, ㉡신문을 보는 학생이 0.6, ㉠신문과 ㉡신문을 모두 보는 학생이 전체의 0.3이었다. 신문을 보지 않는 학생은 전체의 몇 % 인가?

① 5 % ② 10 % ③ 15 % ④ 20 % ⑤ 25 %

해설

㉠신문과 ㉡신문을 보는 학생의 집합을 A, B라 하고, 전체 학생의 수를 K라 하면 $n(A) = 0.5K$, $n(B) = 0.6K$, $n(A \cap B) = 0.3K$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cup B) = 0.8K$

$\therefore$ 신문을 보지 않는 학생의 수는 $K - n(A \cup B) = 0.2K$

그러므로 $\dfrac{0.2K}{K} \times 100 = 20(\%)$

12. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$
$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\ge\dfrac{3}{4}$하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\frac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\ge\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$의 최솟값은 2이고

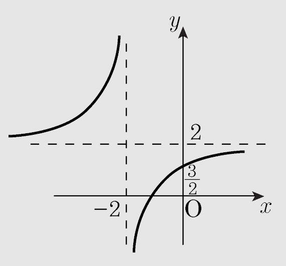
$\dfrac{t}{t^2+1}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

13. 분수함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$
② $\{x \mid x < -2\}$
③ $\{x \mid -2 < x\}$
④ $\{x \mid -2 \le x < 2\}$
⑤ $\{x \mid -2 \le x < 3\}$

해설

$y = \dfrac{2x+3}{x+2} = \dfrac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \dfrac{-1}{x+2}$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

14. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore\ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

15. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{18}$　④ $\frac{1}{36}$　⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$

$6xy = 1$ $\therefore$ $y = \frac{1}{6x}$

$x = 3$ 이므로 $y = \frac{1}{18}$