

1. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

2. 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 거스름돈 없이 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 모두 몇 가지인가? (단, 사용하지 않는 지폐가 있어도 된다.)

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐의 수를 각각 x, y, z 라 하면

$$10000x + 5000y + 1000z = 17000$$

$$\therefore 10x + 5y + z = 17$$

(i) $x = 1$ 일 때, $5y + z = 7$ 이므로

(y, z) 는 $(1, 2), (0, 7)$ 의 두 가지

(ii) $x = 0$ 일 때, $5y + z = 17$ 이므로

(y, z) 는 $(3, 2), (2, 7), (1, 12), (0, 17)$ 의 4가지

(i), (ii)에서 만 원짜리 지폐, 오천 원짜리 지폐, 천 원짜리 지폐를 가지고 17000 원을 지불할 수 있는 서로 다른 방법의 수는 $2 + 4 = 6$ (가지)

3. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$ 임을 보인 것이다.

10개의 숫자 1, 2, 3, ..., 9, 10 중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다.

따라서 다음 등식이 성립한다.

$${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, {}_5P_5$

② ${}_5P_4, {}_9P_5$

③ ${}_9P_4, {}_8P_5$

④ ${}_8P_4, {}_4P_5$

⑤ ${}_4P_4, {}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서

4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$

2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.

따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 + {}_9P_5$

4. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 네 개의 숫자를 써서 네 자리의 정수를 만들 때, 짝수는 몇 개인가?

① 96

② 114

③ 128

④ 144

⑤ 156

해설

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}0 :_5 P_3 = 60$$

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}2 : 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}4 : 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\therefore 60 + 48 \times 2 = 156$$

5. 12개의 프로 야구팀이 다른 모든 팀과 각각 3번씩경기를 치르는 리그전을 벌일 때, 전체 경기 수는?

① 120

② 144

③ 168

④ 198

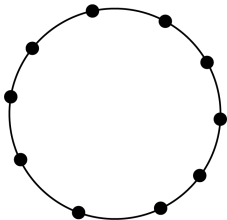
⑤ 200

해설

(12 개의 팀 중에서 2 개의 팀을 고르는 방법) $\times 3$

$$= {}_{12}C_2 \times 3 = 198$$

6. 다음 그림과 같이 원주 위에 10 개의 점이 있다. 이 중에서 2 개의 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수를 l , 3 개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 m , 4 개의 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수를 n 이라 할 때, $l + m + n$ 의 값은?



① 315

② 330

③ 345

④ 360

⑤ 375

해설

원주 위의 10 개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로,

$$l = {}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

$$m = {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

$$n = {}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

$$\therefore l + m + n = 375$$

7. 남자 6 명, 여자 2 명을 4 명씩 두 조로 나눌 때, 여자 2 명이 같은 조에 속하는 경우는 몇 가지인가?

① 14

② 15

③ 20

④ 22

⑤ 30

해설

여자 2 명을 제외한 남자 6 명을 2 명,
4 명으로 나누는 경우를 생각한다.

$${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$$

8. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$

(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots,$

즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots,$

즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)

집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$

㉡ $A \cup B = B$

㉢ $A^c \subset B^c$

㉤ $A \cap B = B$

㉥ $A \cup B^c = U$

㉦ $A - B = \emptyset$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

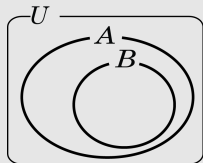
㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉤ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉥ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개



10. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 에 대하여 1 또는 2 또는 3을 포함하는 A 의 부분집합의 개수는?

① $7 \cdot 2^{17}$

② $7 \cdot 2^{17} - 1$

③ 2^{17}

④ $2^{17} - 1$

⑤ $2^{17} + 1$

해설

구하는 부분집합은 A 의 부분집합 중에서 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합을 빼면 된다. A 의 부분집합 중 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합은 2^{17} 개다.

$\therefore$ 구하는 부분집합의 개수는 $2^{20} - 2^{17} = 2^{17}(2^3 - 1) = 7 \cdot 2^{17}$

11. 어느 지역에서 ㉠신문을 보는 학생이 전체의 0.5, ㉡신문을 보는 학생이 0.6, ㉠신문과 ㉡신문을 모두 보는 학생이 전체의 0.3이었다. 신문을 보지 않는 학생은 전체의 몇 % 인가?

① 5 %

② 10 %

③ 15 %

④ 20 %

⑤ 25 %

해설

㉠신문과 ㉡신문을 보는 학생의 집합을 A , B 라 하고, 전체 학생의 수를 K 라 하면 $n(A) = 0.5K$, $n(B) = 0.6K$, $n(A \cap B) = 0.3K$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $n(A \cup B) = 0.8K$
 $\therefore$ 신문을 보지 않는 학생의 수는 $K - n(A \cup B) = 0.2K$

그러므로 $\frac{0.2K}{K} \times 100 = 20(\%)$

12. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= x^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \end{aligned}$$

$$= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{이고}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$x^2 - x + 1 = t \text{로 치환 } t \geq \frac{3}{4} \text{하면}$$

$$\text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$$

$$\text{여기서 } t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

$$(\because t \geq \frac{3}{4})$$

$$\text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{이고}$$

$$\frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

13. 분수함수 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을
바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$

② $\{x \mid x < -2\}$

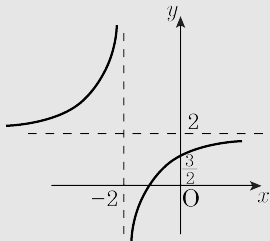
③ $\{x \mid -2 < x\}$

④ $\{x \mid -2 \leq x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \leq x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

14. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은? (단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \dots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\frac{3}{2}$

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$f(0) = 3,$$

$$f^2(0) = \frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore f^{3n}(0) = 0$$

$$1999 = 666 \times 3 + 1$$

$$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$$

15. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{9}$

③ $\frac{1}{18}$

④ $\frac{1}{36}$

⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$$

$$6xy = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{6x}$$

$$x = 3 \text{ 이므로 } y = \frac{1}{18}$$