1. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3i}}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3i}}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3i}}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$

④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

$\therefore$ $y = 2$를 ㉣에 대입하면 $x = 3$

$\therefore$ $x = 3,\ y = 2$

3. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

4. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

5. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

6. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

7. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$

④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

8. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 두 허근을 α,β 라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 허근이므로

$(D<0\ )\alpha+\beta=-2$

9. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 1$

▷ 정답: $x = -2$

▷ 정답: $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면

$f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 3$

10. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$
$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$
$x^2+6x=X$ 로 놓으면
$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$
$X(X+8)+15=0,$
$X^2+8X+15=0$
$(X+3)(X+5)=0$
$\therefore\ X=-3, X=-5$
㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$
$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$
㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$
$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

11. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면

$X^2-8X+12=0,\ (X-2)(X-6)=0$

$\therefore\ X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서

$x^2+x-2=0,$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서

$x^2+x-6=0,$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

12. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

13. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

14. 삼차방정식 $x^3 + ax + b = 0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ 1 ⑤ -1

해설

$x = i$를 대입하면 $(i)^3 + ai + b = 0$ $(a-1)i + b = 0$

$a,\ b$는 실수이므로 $a = 1,\ \ b = 0$

$x^3 + x = 0,\ x(x^2+1) = 0,\ \ x = 0,\ i,\ \ -i$

$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$= 0$

15. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5$, $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$

$a = -3$

$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$

$\therefore\ a + b = 4$

16. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

17. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

18. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω라 할 때, 다음 중 <u>틀린</u> 것은?

① $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega^3=1$

③ 1의 세제곱근은 $1,\ \omega,\ \omega^2$으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2=\overline{\omega}$(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega=-\omega^2$

해설

$x^3=1\Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\quad \omega^2+\omega+1=0,\quad \omega^3=1\cdots$①, ②

$x=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면 $\cdots$③

$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}\cdots$④

$\omega=-1-\omega^2\cdots$⑤(거짓)

19. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \overline{\omega} = -1$
② $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$
③ $\omega^2 + (\overline{\omega})^2 = 1$
④ $\omega^2 = \overline{\omega}$, $(\overline{\omega})^2 = \omega$
⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$,
$x^2 + x + 1 = 0$ $\omega^3 = 1$,
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$,
$\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$
① $x^2 + x + 1 = 0$두근은
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1(\bigcirc)$
② $x^2 + x + 1 = 0$두근은
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega \cdot \overline{\omega} = 1(\bigcirc)$
③ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega \cdot \overline{\omega}$
$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\times)$
④ $\omega + \overline{\omega} = -1$,
$\overline{\omega} = -1 - \omega$
$= -(1 + \omega) = \omega^2$
$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega = -1 - \overline{\omega} = -(1 + \overline{\omega})$
$= \overline{\omega}^2(\bigcirc)$
⑤$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ $(\bigcirc)$

20. 삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 α라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2-\alpha+1=0$

② $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=-1$

③ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3=\alpha^2+\overline{\alpha}^2$

④ $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}=2$

⑤ $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=1$

해설

$x^3=-1,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\alpha^3=\overline{\alpha}^3=-1,$

$\alpha^2-\alpha+1=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+1=0$

$\alpha+\overline{\alpha}=1,$

$\alpha\overline{\alpha}=1$

①$\alpha^2+\alpha+1=0(\bigcirc)$

②$\alpha+\overline{\alpha}=1(\times)$

③$\alpha^3+\overline{\alpha}^3=-1-1=-2$

$\alpha^2+\overline{\alpha}^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2=-1(\times)$

④$\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}$

$=\dfrac{\alpha+1}{1-\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}$

$=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+1=\dfrac{2}{1-\alpha}(\times)$

⑤$\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2$

$=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})=1(\bigcirc)$

21. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\text{cm})$

22. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$

$\therefore$ $x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a<-1$ ③ $a>\frac{3}{2}$

④ $a<\frac{3}{2}$ ⑤ $a>-2$

해설

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

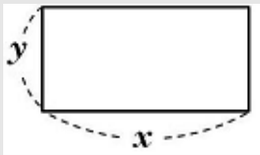
24. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ……㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

25. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

> (가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
> (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x + 3y = 10500$, (나)$x + y = 1680$

② (가)$25x + 3y = 10500$, (나)$x + y = 3360$

③ (가)$25x + 3y = 15000$, (나)$x + y = 1680$

④ (가)$25x + 3y = 15000$, (나)$x + y = 3360$

⑤ (가)$25x + 3y = 15000$, (나)$x + y = 1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\dfrac{x}{60} + 3 + \dfrac{y}{500} = 10$, $\dfrac{x}{60} + \dfrac{y}{500} = 7$

$\therefore\ 25x + 3y = 10500$

(나) $\dfrac{x+y}{60} = 28$

$\therefore\ x + y = 1680$

26. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 + t = 0,\ t(t+1) = 0$

$\therefore\ t = 0$ 또는 $t = -1$

(ⅰ) $x + \frac{1}{x} = 0$일 때, $x^2 + 1 = 0$

$\therefore x = \pm i$

(ⅱ) $x + \frac{1}{x} = -1$일 때,

$x^2 + 1 = -x,\ x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore\ (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

27. x에 관한 삼차방정식 $kx^3+(1-2k)x^2+(k-2)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $0<k\le\frac{1}{2}$ ② $0<k\le 1$ ③ $-\frac{1}{2}<k\le 0$

④ $-\frac{1}{2}<k\le\frac{1}{2}$ ⑤ $0<|k|\le\frac{1}{2}$

해설

준식$=(x-2)(kx^2+x+k)=0$에서

$kx^2+x+k=0$이 실근이어야하므로

$D=1-4k^2\ge 0$,

$k\neq 0$이므로 $0<|k|\le\frac{1}{2}$

28. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

29. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x,y,z)의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$

$$\therefore\ (x,y,z)=$$

$$\left(1,\frac{1}{2},-2\right),\ \left(1,-2,\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2},1,-2\right),\ \left(\frac{1}{2},-2,1\right),$$

$$\left(-2,1,\frac{1}{2}\right),\ \left(-2,\frac{1}{2},1\right)$$

30. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5+y^5=1$ ② $x^7+y^7=1$ ③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$ ⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5=x^3\times x^2+y^3\times y^2=-(x^2+y^2)=-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

31. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n의 최솟값은 2

32. 사차방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 두 실근의 합을 구하면?

① -5 ② -6 ③ 0 ④ 5 ⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x}^2=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$라 놓으면

$t^2+5t-6=0,\ (t+6)(t-1)=0$

$\therefore\ t=1,\ -6$

즉, $x+\frac{1}{x}=1,\ x+\frac{1}{x}=-6$

$\therefore\ x^2-x+1=0\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+6x+1=0\cdots\cdots$ ㉡

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고
㉡식에서 두 실근의 합은
근과 계수와의 관계에서

$\therefore\ \alpha+\beta=-6$

33. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡

$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢

㉠, ㉡에서

$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=20$

$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤

㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 x, y, z를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$

$t=1, -2, 3$

$x<y<z$이므로 $x=-2$ $y=1$ $z=3$

$\therefore x-2y+z=-1$