1. 두 다항식 x^3+1, x^3+2x^2-5x-6의 최대공약수를 구하면?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x-1$ ⑤ $x-2$

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$
따라서 최대공약수는 $x+1$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값$+$최솟값$= -4$

3. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \ge 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$　　② $a < -\frac{1}{3}$　　③ $a \ge -\frac{1}{3}$
④ $a \le -\frac{1}{3}$　　⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \ge 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(a+10)^2-4a^2 < 0,\ \ -3a^2+2a+1 < 0$
$3a^2-2a-1 > 0,\ \ (3a+1)(a-1) > 0$
$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$

따라서 $ax^2+(a+1)x+a \ge 0$을 만족하는 실수가 존재하려면

$a \ge -\frac{1}{3}$이면 된다.

4. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$= 7$

5. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z라 하면

$x+y+z=22 \cdots\cdots$ ①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14 \cdots\cdots$ ②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

6. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 15

해설

x에 대한 항등식이므로

$x=1$일 때, $2=c \cdots\cdots$ ㉠

$x=2$일 때, $9=b+c \cdots\cdots$ ㉡

$x=3$일 때, $28=2a+2b+c \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=7$, $c=2$

$\therefore\ a+b+c=15$

7. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

8. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -5이고, $x-1$로 나눈 나머지는 -1이다. 이때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $2x+3$ ③ $2x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

한편, $f(x)$를 $x+1$, $x-1$로 나눈 나머지가 각각 -5, -1이므로

$f(-1)=-a+b=-5$, $f(1)=a+b=-1$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$이다.

9. a^4-7a^2+9를 인수분해하면?

① $(a^2+a+3)(a^2-a+3)$

② $(a^2-2a-3)(a^2-a-3)$

③ $(a^2+a-3)(a^2-a-3)$

④ $(a^2+2a-3)(a^2-a-3)$

⑤ $(a^2+a-3)(a^2-2a-3)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a^4-6a^2+9)-a^2 \\ &= (a^2-3)^2-a^2 \\ &= (a^2+a-3)(a^2-a-3)\end{aligned}$$

10. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. $(a, b, c, d$는 상수$)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a+b+c+d = 4$

11. 다항식 $f(x)=x^4+ax^2+x+2$를 $g(x)=x^3+bx+2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x+2$일 때, ab의 값은?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$에서
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수 $x+2$ 는
$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2)=16+4a=0, a=-4$
$g(-2)=-8-2b+2=0, b=-3$
$\therefore\ ab=12$

12. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** i

해설

$$\begin{aligned}
&1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006} \\
&= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots \\
&\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006}) \\
&= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\
&\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1) \\
&= i
\end{aligned}$$

13. 두 복소수 α, β에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i)\odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② $-i$　　③ i

④ $1-i$　　⑤ $-1+i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$이므로

$z = x + yi$ (단, x, y는 실수)라 하면

$(1+i) \odot (x+yi)$

$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$

$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$

$= x - 2y - 1 + (2x+y+1)i = 1$

$\therefore\ x - 2y - 1 = 1 \cdots$ ㉠, $2x + y + 1 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 0$, $y = -1$　　$\therefore\ z = -i$

14. $x = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2 - 6x + 1 = -2$, $9x^2 - 6x = -3$

양변을 3 으로 나누면

$\therefore\ 3x^2 - 2x = -1$

15. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 근이므로
$x = 1$을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore \ x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

16. 이차방정식 $x^2 - 2ax - 3a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 a 의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a = -3,\ x = -3$　　② $a = -3,\ x = 0$

③ $a = 0,\ x = -3$　　④ $a = 3,\ x = 0$

⑤ $a = 3,\ x = 3$

해설

$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-3a) = 0$

$a^2 + 3a = 0,\ a(a+3) = 0$

$a = -3$ 또는 0

(i) $a = -3$ 일 때,

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

$\therefore x = -3$(중근)

(ii) $a = 0$ 일 때,

$x^2 = 0$

$\therefore x = 0$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1$, $\beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 a, b의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$ ㉠

또, $x^2-bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

18. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$

② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,

(준식)

$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

19. 이차함수 $y = ax^2 - 4x - c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최댓값 1 을 가진다. 이때, ac 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = ax^2 - 4x + c$ 는 $x = 2$ 일 때,
최솟값 -1 이므로
$y = a(x-2)^2 + 1 = ax^2 - 4ax + 4a + 1$
$-4a = -4$, $4a + 1 = -c$ 이므로
$a = 1$, $4 + 1 = -c$, $c = -5$
$\therefore ac = -5$

20. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

21. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

22. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2$(cm)

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 7 ⑤ ± 9

해설

$$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

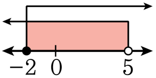
$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

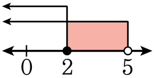
$-k^2+25=0,\ k^2=25$

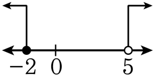
$\therefore\ k \pm 5$

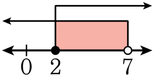
24. 다음 연립방정식의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

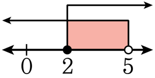
$$\begin{cases} 4(5-2x) \le 4 \\ 3(7x+1) < 108 \end{cases}$$

①


②


③


④


⑤


해설

$4(5-2x) \le 4 \;\Rightarrow\; x \ge 2$

$3(7x+1) < 108 \;\Rightarrow\; x < 5$

$\therefore\; 2 \le x < 5$

25. 어떤 삼각형의 세변의 길이가 a, $a+4$, $a+6$ 이라고 할 때, 가능한 a의 범위로 옳은 것은?

① $a<2$ ② $a>2$ ③ $0<a<2$

④ $0 \le a < 2$ ⑤ $0<a \le 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+6<a+(a+4)$
이고 정리하면 $a>2$이다.

26. $|x-2| \le 2x-1$을 만족하는 x의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(ⅰ) $x \ge 2$일 때

$x-2 \le 2x-1$에서 $-1 \le x$

따라서 이 범위에서의 해는 $x \ge 2$

(ⅱ) $x < 2$일 때

$-x+2 \le 2x-1$에서 $1 \le x$

따라서 이 범위에서의 해는 $1 \le x < 2$

두 범위에서 구해진 해에 의해 나올 수 있는 x의 최솟값은 1이다.

27. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) <0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) <0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6)\geq 0$
$a^2-5a-6\leq 0$
$(a-6)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 6\cdots$②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

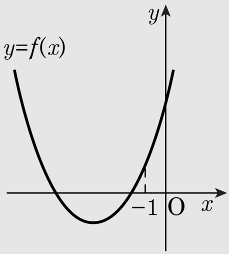
28. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

29. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-6k<0,\quad k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0\qquad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$

30. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b의 값을 구하면?

$x^2 - 2x - 3 < 3|x-1| \cdots$ ㉠
$ax^2 + 2x + b > 0 \cdots$ ㉡

① $a = -1,\ b = 15$
② $a = -2,\ b = 14$
③ $a = -3,\ b = 13$
④ $a = -4,\ b = 12$
⑤ $a = -5,\ b = 10$

해설

㉠ 부등식에서 $x \geq 1$일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$
$\therefore x^2 - 5x < 0$이므로 $0 < x < 5$
$\therefore 1 \leq x < 5 \cdots$ ㉠
$x < 1$일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$
$x^2 + x - 6 < 0$이므로 $(x-2)(x+3) < 0$
$\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $-3 < x < 5$
$\therefore a(x+3)(x-5) < 0$
$\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$
$ax^2 + 2x + b > 0$와 일치해야 하므로
$a = -1,\ b = 15$