

1. 이차함수 $y = 3x^2 + a(2 + b)x - 4$ 는 축의 방정식이 $x = 2$ 이고, 최솟값은 b 이다. 이때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

① $-\frac{9}{7}$

② $\frac{6}{7}$

③ 30

④ $-\frac{16}{7}$

⑤ $-\frac{96}{7}$

해설

$$\begin{aligned}y &= 3(x-2)^2 + b \\&= 3(x^2 - 4x + 4) + b \\&= 3x^2 - 12x + 12 + b\end{aligned}$$

$$12 + b = -4 \therefore b = -16$$

$$2a + ab = 2a - 16a = -12$$

$$-14a = -12$$

$$\therefore a = \frac{6}{7}$$

$$\therefore ab = \frac{6}{7} \times (-16) = -\frac{96}{7}$$

2. $-2 \leq x \leq 0$ 에서 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + a + 1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -2x^2 + 4x + a + 1 = -2(x-1)^2 + a + 3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
 x 의 값의 범위 $-2 \leq x \leq 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고
 $x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다.

최댓값이 1 이므로 $a + 1 = 1 \quad \therefore a = 0$

3. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t - 2)^2 - 2 \quad (-2 \leq t \leq 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

4. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 + m$ 의 최솟값이 5 일 때, 이 그래프의 y 절편은 n 라고 한다. 이 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값을 구하면?

① 6

② 9

③ 15

④ 21

⑤ 24

해설

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 + m$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16 - 16) - 3 + m \\ &= \frac{1}{4}(x - 4)^2 - 7 + m \end{aligned}$$

최솟값이 5 이므로 $-7 + m = 5$ 에서 $m = 12$ 이다.

y 절편은 $n = -3 + m = -3 + 12 = 9$ 이다.

따라서 $m + n = 12 + 9 = 21$ 이다.

5. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$

② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$

④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.

이 중 $(0, -3)$ 을 지나면,

$$-3 = 4a + 3$$

$$4a = -6$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$$

6. x 의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = -2(x - 1)^2 + 3$$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

7. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

8. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면

$$y = 2x - k \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x - k)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 x 에 대한 이차방정식으로 보면
 x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$$

$$\therefore -5 \leq k \leq 5$$

따라서 k 의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y 의 값은

$$\textcircled{㉡}\text{에서 } 5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서 } y = 4 - 5 = -1$$

따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로

$$m + \alpha + \beta = 6$$