

1. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 2 일 때, k 의 값을 구하면?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = -2(x^2 - 2x) + k = -2(x - 1)^2 + (k + 2) \text{ 에서}$$

$$\text{최댓값 } k + 2 = 2$$

$$\therefore k = 0$$

2. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 최솟값이 5 가 되었다. 이때, 상수 m 의 값을 구하면?

① -16 ② -10 ③ -6 ④ 2 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + m + 10 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + m + 10 \\ &= \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 8 + m \end{aligned}$$

x 축의 방향으로 1 만큼 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 식은

$$y = \frac{1}{2}(x - 2 - 1)^2 + 8 + m + 3 = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 11 + m$$

최솟값이 5 이므로 $11 + m = 5$ 에서 $m = -6$ 이다.

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 45 ② 20 ③ -5 ④ -20 ⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+1)(x-5) \\ &= a(x^2 - 4x - 5) \\ &= a(x-2)^2 - 9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고

$b = 4, c = 5$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 3$ 이 $x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a - m$ 의 값은?

① -9

② 6

③ 3

④ -3

⑤ -6

해설

$$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$$

$x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$$a = -3, -a^2 + 3 = m, m = -6$$

$$\therefore a - m = -3 - (-6) = 3$$

5. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 한 점 $(-2, -5)$ 을 지나고, $x = m$ 일 때 최솟값 $2m$ 을 갖는다. m 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(m, 2m)$ 이므로
 $y = (x - m)^2 + 2m$ 에 $(-2, -5)$ 를 대입한다.

$$-5 = (-2 - m)^2 + 2m$$

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m + 3)^2 = 0$$

따라서 $m = -3$ 이다.

6. $y = x^2 - 2|x| + 2$ ($-1 \leq x \leq 3$) 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2|x| + 2$ ($-1 \leq x \leq 3$) 에서

(i) $-1 \leq x < 0$ 일 때,

$$y = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

(ii) $0 < x \leq 3$ 일 때,

$$y = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore M = 5, m = 1 \quad \therefore M + m = 5 + 1 = 6$$

7. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$$t = -x^2 + x + 3$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ 에서}$$

$$3 \leq t \leq \frac{13}{4}$$

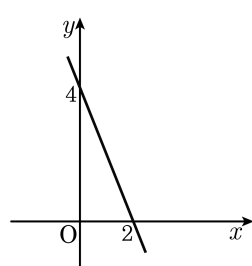
따라서

$$\begin{aligned} f(4 - f(x)) &= f(t) = t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \left(3 \leq t \leq \frac{13}{4}\right) \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7 을 갖는다.

8. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8
 ④ -8 ⑤ 0



해설

기울기 $a = -2$, y 절편 $b = 4$

$$y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

$$= \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$$

$x = 4$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

9. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$$i) a = -\frac{3}{8} \text{ 대입 :}$$

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$$ii) a = 3 \text{ 대입 : } -12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$$

따라서 $a = 3$ 이다.

10. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1, 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3, -4)$ 이므로 $y = a(x - 3)^2 - 4$

$(1, 2)$ 를 대입하면

$$2 = 4a - 4$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x - 3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}, b = -9, c = \frac{19}{2}$$

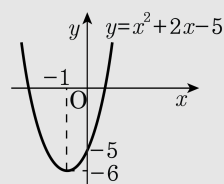
$$\therefore a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$$

11. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

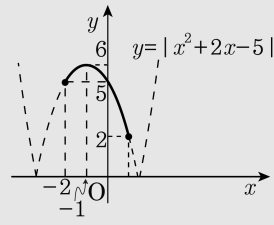
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로
 $y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

12. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$$M = k^2 + 4k \text{ 이므로}$$

$$M = (k + 2)^2 - 4 \text{ 이다.}$$

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

13. $2x^2 + y^2 = 8$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $4x + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 + y^2 = 8$ 에서

$y^2 = 8 - 2x^2$ 으로 놓으면

$y^2 = 8 - 2x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

이 때, $y^2 = 8 - 2x^2$ 을 $4x + y^2$ 에 대입하면

$4x + y^2 = 4x + (8 - 2x^2) = -2(x - 1)^2 + 10$

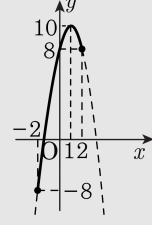
여기서 $f(x) = 4x + y^2 = -2(x - 1)^2 + 10$

이라고 하면 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

다음 그림에서 $x = 1$ 일 때

$f(x)$ 의 최댓값은 10

$x = -2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2 - 1)^2 + 10 = -8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + (-8) = 2$

14. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$
 $= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6$
 $= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3$
 x, y 는 실수이므로 $(x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0$
 $\therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3$
따라서, $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

15. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2 - x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2 - x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x + 2)(3x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.