

1. $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2005}$ 를 간단히 하면?

- ① $1 - i$ ② $1 + i$ ③ $-i$ ④ i ⑤ 1

해설

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

$i^4 = 1$ 이므로

$$i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = i^2 = -1,$$

$$i^{4k+3} = i^3 = -i, i^{4k} = i^4 = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots + (i + i^2 + i^3 + i^4) + i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

2. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $z\bar{z} > 0$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.
- $\textcircled{\text{㉤}}$ $z^2 + \bar{z}^2 \geq 0$

- $\textcircled{\text{①}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{②}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{③}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- $\textcircled{\text{④}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- $\textcircled{\text{⑤}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}$

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi, (a, b \text{ 는 실수})$

$\textcircled{\text{㉠}}$ $z + \bar{z} = 2a(\text{실수})$

$\textcircled{\text{㉡}}$ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$

$\textcircled{\text{㉢}}$ $z - \bar{z} = 2bi, b = 0$ 일 경우에는 0 이다.

즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.

ex) $z = 3, \bar{z} = 3, z - \bar{z} = 3 - 3 = 0$

$\textcircled{\text{㉤}}$ $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2) \rightarrow$ 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

3. $z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1 + \sqrt{3}i$

② $2 + \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $2 + 2\sqrt{3}i$

⑤ $3 + 3\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i} \text{ 에서 } z^2 - z + 1 = 0 \therefore z^3 = -1$$

$$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z - 1) + 3z = 1 + 2z$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로 } 1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$$

4. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$$(a-2)(x-a)=0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ 또는 } x=a$$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

5. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(m - a + 1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = -1, b = \frac{1}{2}$

③ $a = -1, b = -\frac{1}{2}$

⑤ $a = 1, b = -1$

② $a = 1, b = \frac{1}{2}$

④ $a = 1, b = -\frac{1}{2}$

해설

$$\frac{D}{4} = 0 \text{이므로}$$

$$(m - a + 1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0,$$

m 에 관하여 정리하면

$$2(-a + 1)m - 2a + 2b + 1 = 0$$

m 에 관계없이 성립하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + 2b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1}{2}$$

6. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 + 6x + 4 = 0$

② $x^2 + 6x - 4 = 0$

③ $x^2 + 4 = 0$

④ $x^2 - 6x + 4 = 0$

⑤ $x^2 - 6x - 4 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해서

두 근 α, β 에 대해 $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$

두 근을 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 로 하는

방정식에서

$$\text{두 근의 합} \Rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= (-3) + \frac{-3}{1} = -6$$

$$\text{두 근의 곱} \Rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 4$$

$$\therefore x^2 - (-6)x + 4 = x^2 + 6x + 4 = 0$$

7. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 3 - k = 0$ 의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k 의 범위는?

① $k \leq -1, k \geq 2$

② $k \leq -1$

③ $2 \leq k < 3$

④ $1 < k < 3$

⑤ $k \leq -1, 2 \leq k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (3-k) = k^2 - k - 2 \geq 0$$

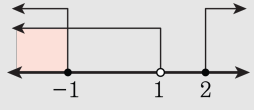
$$(k-2)(k+1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -1, k \geq 2 \dots \textcircled{2}$$

㉡ 둘 다 양수이려면 합 > 0 이고, 곱 > 0

$$-2(k-1) > 0, 3-k > 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore k < 1$$

$\Rightarrow$  $\therefore k \leq -1$

8. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}}$ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

이므로 허근을 가진다. $\therefore a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x = -1$ 일 때 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

9. $\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1

② $\pm 2i$

③ ± 2

④ $\pm i$

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$$

$$\frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2 - z}{z\bar{z}} = i$$

$$\frac{a^2 - 2abi - b^2 + a - bi + a^2 + 2abi - b^2 - a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= i$$

$$\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{-2b}{a^2 + b^2}i = i$$

$$a^2 = b^2, \frac{-2b}{a^2 + b^2} = +1$$

$$\therefore a = \pm 1, b = -1$$

$$z = \pm 1 - i, z^2 = \pm 2i$$

10. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

11. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 - (2k + 5)x + 3 = 0$ 의 두 근 중 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = k^2$ 이 성립한다. 이때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a 이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$ 이다.

$$\therefore a + \frac{1}{a} = k^2 = \frac{2k+5}{3}$$

$$\therefore 3k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k = \frac{5}{3} \text{ 또는 } -1$$

$$\therefore \text{양수 } k = \frac{5}{3}$$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = m(x + 2)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x - 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = m(x + 2) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

이라 하면 직선 $\textcircled{2}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

이 때, 교점의 x 좌표가 1 과 2 사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{2}$ 이

점 $(1, 0)$ 을 지날 때

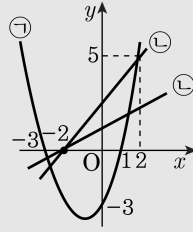
$$3m = 0 \quad \therefore m = 0$$

(ii) 직선 $\textcircled{2}$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지날 때

$$4m = 5 \quad \therefore m = \frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $0 < m < \frac{5}{4}$

따라서, 정수 m 의 값은 1 하나뿐이다.



13. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$$i) a = -\frac{3}{8} \text{ 대입 :}$$

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$$ii) a = 3 \text{ 대입 : } -12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$$

따라서 $a = 3$ 이다.

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이
두 실근을 가져야 하므로
 $D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$
 $(3a+2)(a+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \text{㉠}$
근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2$ 이므로
 $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$
 $= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$
 $= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서
 $a = -1$ 일 때 최솟값 0,
 $a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

15. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

- ① 2600원 ② 2670원 ③ 2700원
④ 2750원 ⑤ 2800원

해설

3000원에서 10x원 가격을 내렸을 때
1kg의 판매가격은 $3000 - 10x$
1일 판매량은 $100 + 3x$
따라서 하루의 이익 P 는
$$\begin{aligned} P &= (3000 - 10x)(100 + 3x) - 2000(100 + 3x) \\ &= (1000 - 10x)(100 + 3x) \\ &= -30x^2 + 2000x + 100000 \\ &= -30\left(x^2 - \frac{200}{3}x\right) + 100000 \\ &= -30\left(x - \frac{100}{3}\right)^2 + \frac{400000}{3} \end{aligned}$$
 x 가 문제에서 정수이므로 $x = 33$ 일 때 최대이다.
따라서 $3000 - 330 = 2670$ (원)