1. $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}$를 간단히 하면?

① $1-i$ ② $1+i$ ③ $-i$ ④ i ⑤ 1

해설

$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=i^2=-1,$

$i^{4k+3}=i^3=-i, i^{4k}=i^4=1$

(준식) $=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i+i^2+i^3+i^4)+i$

$=1+i$

2. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다. ㉡ $z\bar{z}>0$

㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다. ㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $z+\bar{z}=2a$(실수)

㉡ $z\bar{z}=a^2+b^2>0$

㉢ $z-\bar{z}=2bi$, $b=0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)\ z=3,\ \bar{z}=3,\ z-\bar{z}=3-3=0$

㉣ $z^2+\bar{z}^2=2(a^2-b^2) \rightarrow$ 우변이 0 보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

3. $z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1+\sqrt{3}i$ ② $2+\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$

④ $2+2\sqrt{3}i$ ⑤ $3+3\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 에서 $z^2 - z + 1 = 0 \quad \therefore \ z^3 = -1$

$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z-1) + 3z = 1 + 2z$

$z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$

4. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

5. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(m-a+1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2}$

② $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

③ $a=-1,\ b=-\dfrac{1}{2}$

④ $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$

⑤ $a=1,\ b=-1$

해설

$\dfrac{D}{4}=0$이므로

$(m-a+1)^2-(m^2+a^2-2b)=0,$

m에 관하여 정리하면

$2(-a+1)m-2a+2b+1=0$

m에 관계없이 성립하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+2b+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

6. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x+4=0$　② $x^2+6x-4=0$

③ $x^2+4=0$　④ $x^2-6x+4=0$

⑤ $x^2-6x-4=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해서

두 근 α, β에 대해 $\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$

두 근을 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$로 하는

방정식에서

두 근의 합 $\Rightarrow \left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=(-3)+\frac{-3}{1}=-6$$

두 근의 곱 $\Rightarrow \left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4$$

$\therefore\ x^2-(-6)x+4=x^2+6x+4=0$

7. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k의 범위는?

① $k \le -1,\ k \ge 2$

② $k \le -1$

③ $2 \le k < 3$

④ $1 < k < 3$

⑤ $k \le -1,\ 2 \le k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\dfrac{D}{4} \ge 0$

$\dfrac{D}{4} = (k-1)^2 - (3-k) = k^2 - k - 2 \ge 0$

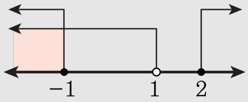
$(k-2)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1, k \ge 2 \cdots$ ㉮

㉡ 둘 다 양수이려면 합 >0 이고, 곱 >0

$-2(k-1) > 0,\ 3-k > 0 \cdots$ ㉯

$\therefore\ k < 1$

$\Rightarrow$  $\therefore\ k \le -1$

8. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\dfrac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\dfrac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\dfrac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

9. $\dfrac{\bar{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\bar{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ±1 ② $\pm2i$ ③ ±2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z=a+bi \\ z=a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=i$$

$$\frac{\bar{z}^2+\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

10. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

11. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2　② $\dfrac{5}{3}$　③ 1　④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면

다른 한 근은 $\dfrac{1}{a}$이다.

$\therefore\ \ a+\dfrac{1}{a}=k^2=\dfrac{2k+5}{3}$

$\therefore\ \ 3k^2-2k-5=0$

$k=\dfrac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\dfrac{5}{3}$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개　　② 1개　　③ 2개　　④ 3개　　⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x-3 \cdots\cdots ㉠ \\ y = m(x+2) \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

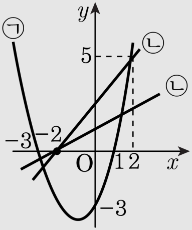
이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1 과 2사이에 존재해야 하므로

(ⅰ) 직선 ㉡이

점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$



(ⅱ) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

13. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)$ $a=-\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii)$ $a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

따라서 $a=3$ 이다.

14. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$이
두 실근을 가져야 하므로
$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)=-3a^2-8a-4\geq 0$
$(3a+2)(a+2)\leq 0$
$\therefore -2\leq a\leq -\frac{2}{3}\cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a+2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$이므로
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=a^2+a+2+a-2+1$
$=a^2+2a+1=(a+1)^2$
따라서, $-2\leq a\leq -\frac{2}{3}$에서
$a=-1$일 때 최솟값 0,
$a=-2$일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

15. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600원　② 2670원　③ 2700원
④ 2750원　⑤ 2800원

해설

3000원에서 $10x$원 가격을 내렸을 때
1kg의 판매가격은 $3000-10x$
1일 판매량은 $100+3x$
따라서 하루의 이익 P는

$$\begin{aligned}P &= (3000-10x)(100+3x)-2000(100+3x)\\ &= (1000-10x)(100+3x)\\ &= -30x^2+2000x+100000\\ &= -30\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+100000\\ &= -30\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{400000}{3}\end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x=33$일 때 최대이다.
따라서 $3000-330=2670$(원)