

1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1, 1, 2$$

$$\therefore -1+1+2=2$$

2. 다음 방정식을 만족하는 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } x = 2y - 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 2(2y - 5) + y + 10 = 0$$

$$\therefore y = 0$$

$$y = 0 \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } x = -5$$

$$\therefore x = -5, y = 0$$

3. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2$, $y = -3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x = 2$, $y = -3$ 을

두 방정식

$2x + ay = 10$, $x - y = b$ 에 대입하면

모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$

$\therefore a = -2$

$2 - (-3) = b$

$\therefore b = 5$

$\therefore a + b = 3$

4. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = -1, 0, 1$$

5. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 의 모든 실근의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 를 전개하면
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$
 $x = 5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5	1	-6	11	-30
		5	-5	30
	1	-1	6	0

$(x-5)(x^2 - x + 6) = 0$

$\therefore x = 5$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

6. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

7. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면
 $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

1		1	-2	-5	6
			1	-1	-6
		1	-1	-6	0

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

8. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을
인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

1		1	-6	11	-6
			1	-5	6
		1	-4	5	0

$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

9. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

10. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 에서

$x^2 + x + 2 = A$ 라 하면

$A^2 = A + 2,$

$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -1$ 또는 $A = 2$

(i) $x^2 + x + 2 = -1$ 일 때, $x^2 + x + 3 = 0$

(ii) $x^2 + x + 2 = 2$ 일 때, $x^2 + x = 0$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$

11. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

- ① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = t \text{라 하면}$$

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

12. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$

② $1 \leq k < 2$

③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

13. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 + 2 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

14. 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하는 x 의 삼차방정식은 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -3$$

$$-c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

15. a, b 가 실수이고 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 다른 한 근을 α 라고 하면삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
 $(1 + i) + (1 - i) + \alpha = -a \cdots \textcircled{1}$
 $(1 + i)(1 - i) + (1 + i)\alpha + (1 - i)\alpha = -4 \cdots \textcircled{2}$
 $(1 + i)(1 - i)\alpha = -b \cdots \textcircled{3}$
②에서 $\alpha = -3$
①, ③에 각각 대입하면 $a = 1, b = 6$
 $\therefore a + b = 7$

해설

[별해1] 계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 좌변은 $\{x - (1 - i)\} \{x - (1 + i)\} = x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나눗셈을 하여 정리하면 $x^3 + ax^2 - 4x + b = (x^2 - 2x + 2)(x + a + 2) + (2a - 2)x + b - 2a - 4$
 $\therefore 2a - 2 = 0, b - 2a - 4 = 0$
 $\therefore a = 1, b = 6$
주어진 방정식에 $1 + i$ 를 대입하여 복소수의 상등을 이용해도 된다.

16. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 근을 $1 - i, 1 + i, \gamma$ 라 하면

$$(1 - i)(1 + i)\gamma = 4, 2\gamma = 4, \gamma = 2$$

$$a = -(1 - i + 1 + i + 2) = -4$$

$$b = (1 - i)(1 + i) + (1 + i)2 + 2(1 - i) = 6$$

$$\therefore a + b = 2$$

17. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면
 $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \dots\dots\dots \textcircled{B}$
 $\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \dots\dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

18. 방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega(2\omega - 1)(\omega^2 + 2)$ 의 값은 ?

① $-\omega$

② ω

③ -3

④ 3

⑤ 5

해설

$$x^3 + 1 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \omega(2\omega - 1)(\omega^2 + 2)$$

$$= (2\omega - 1)(\omega^3 + 2\omega)$$

$$= (2\omega - 1)(-1 + 2\omega)$$

$$= 4\omega^2 - 4\omega + 1$$

$$= 4(\omega - 1) - 4\omega + 1$$

$$= 4\omega - 4 - 4\omega + 1$$

$$= -3$$

19. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 ω , $\bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \bar{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \bar{\omega}, (\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1, (x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

$$x^2+x+1=0 \quad \omega^3=1,$$

$$\omega^2+\omega+1=0,$$

$$\bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

① $x^2+x+1=0$ 두근은

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1(\bigcirc)$$

② $x^2+x+1=0$ 두근은

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega \cdot \bar{\omega} = 1(\bigcirc)$$

③ $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$

$$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\times)$$

④ $\omega + \bar{\omega} = -1,$

$$\bar{\omega} = -1 - \omega$$

$$= -(1 + \omega) = \omega^2$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^2(\bigcirc)$$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0 (\bigcirc)$

20. $x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$w^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{의 한 허근이 } \omega$$

$$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$$

$$= w^2 + w + 1$$

$$= 0$$

21. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + 3w^4 - 2w^5$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -4

해설

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일 때
 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로
 $1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 \cdot 1 + 3\omega^3 \cdot \omega - 2\omega^3 \cdot \omega^2$
 $= 1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 + 3\omega - 2\omega^2$
 $= \omega^2 + \omega + 1 - 4 = -4$
 $\therefore -4$

22. 두 다항식 $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = x^3 + 3x + 1$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값은?

① 350 ② 351 ③ 352 ④ 353 ⑤ 354

해설

$f(x) = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라고 하면 $\alpha^3 = 5, \beta^3 = 5, \gamma^3 = 5$ 이다.

$g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 1 = 3\alpha + 6, g(\beta) = \beta^3 + 3\beta + 1 = 3\beta + 6,$

$g(\gamma) = \gamma^3 + 3\gamma + 1 = 3\gamma + 6$ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

$= (3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6) = 351$ ($\because \alpha+\beta+\gamma = 0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = 5$)

23. 다음은 삼차방정식 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{가}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1 = -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다. 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1 = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$

② (나) $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$
- ③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$

④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$
- ⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

해설

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{가}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1 = -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다.

또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0 \quad (\because \textcircled{가})$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

24. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a , b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$ 이다.
 $a + b = 70$, $1.2a + 1.25b = 86$
연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$

25. 가로 길이가 세로 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로 길이와 세로 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로 길이를 각각 $x\text{cm}$, $y\text{cm}$ 라 하면



$x = y + 5 \dots\dots\textcircled{1}$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
 $2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y + 5 + y = 17, 2y = 12$
 $\therefore y = 6$
 $y = 6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = 11$
 $\therefore xy = 11 \times 6 = 66$

26. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α , 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

- ① $\sqrt{5}$
- ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- ③ $1 - \sqrt{5}$
- ④ $2 - \sqrt{5}$
- ⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면
$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$
$$x + \frac{1}{x} = t \text{라 하면}$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, 3$$

i) $t = 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\therefore x = 1$$

ii) $t = 3$ 일 때

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

27. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

28. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i, x^2 = -3 + 4i, x^3 = -11 - 2i, x^4 = -7 - 24i,$
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$
 $= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$
 $(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$
 $\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$
연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$ 에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
 $a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$
 $\therefore k = 4, a = 2, b = 0$

29. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

- ① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$, $\alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma$, $\beta + \gamma = 2 - \alpha$, $\gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore k = 4$

30. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x + 3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2}{x^3}\text{의 계수}\right)$ 이므로
 x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
 $f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$
 $f(2x + 3)$
 $= (2x + 3)^3 - 3 \cdot (2x + 3)^2 + b \cdot (2x + 3) + d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
 $8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$
 $\therefore$ 세 근의 합 $= -3$

해설

$f(2x + 3) = 0$ 의 세 근을
각각 p, q, r 이라 하면,
 $2p + 3 = \alpha \dots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2q + 3 = \beta \dots \textcircled{\text{㉡}}$
 $2r + 3 = \gamma \dots \textcircled{\text{㉢}}$
 $\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}}$ 에서
 $2(p + q + r) + 9 = 3$
 $\therefore p + q + r = -3$

31. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β 라 하면
네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$
 $\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

32. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

33. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

보기

- $\textcircled{\tiny \Gamma} \quad \omega + \frac{1}{\omega} = -1$
- $\textcircled{\tiny \Delta} \quad \omega^2 + \bar{\omega}^2 = 1$
- $\textcircled{\tiny \Xi} \quad (\omega + 1)(\bar{\omega} + 1) = 1$

- ① $\textcircled{\tiny \Gamma}$
- ② $\textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \Delta}$
- ③ $\textcircled{\tiny \Delta}, \textcircled{\tiny \Xi}$
- ④ $\textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \Xi}$
- ⑤ $\textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \Delta}, \textcircled{\tiny \Xi}$

해설

$x^3 = 1,$
 $x^3 - 1 = 0,$
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $w^2 + w + 1 = 0 \cdots \textcircled{\tiny \Gamma}$
 $\bar{w}^2 + \bar{w} + 1 = 0 \cdots \textcircled{\tiny \Delta}$
 $\textcircled{\tiny \Gamma}$ ①식을 w 로 나누면 $w + \frac{1}{w} = -1$
 $\textcircled{\tiny \Delta} \quad x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근 $w, \bar{w}$
 $w + \bar{w} = -1, \quad w\bar{w} = 1$
 $w^2 + \bar{w}^2 = (w + \bar{w})^2 - 2w\bar{w} = 1 - 2 = -1$
 $\textcircled{\tiny \Xi} \quad (w + 1)(\bar{w} + 1)$
 $= w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
 $\therefore \textcircled{\tiny \Gamma}, \textcircled{\tiny \Xi}$ 맞음