1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1, 1, 2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

2. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore\ y = 0$

$y = 0$을 ㉢에 대입하면 $x = -5$

$\therefore\ x = -5,\ y = 0$

3. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2,\ y = -3$일 때, $a + b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x = 2,\ y = -3$을

두 방정식

$2x + ay = 10,\ x - y = b$에 대입하면

모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$

$\therefore\ a = -2$

$2 - (-3) = b$

$\therefore\ b = 5$

$\therefore\ a + b = 3$

4. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore \ x = -1, 0, 1$

5. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5	1	−6	11	−30
		5	−5	30
	1	−1	6	0

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

6. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서

$x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-10=0,\ (t+5)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

7. $x^3-2x^2-5x+6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=-2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 으로 놓으면

$f(1)=1-2-5+6=0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-5x+6 &= (x-1)(x^2-x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

8. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

9. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자

$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$

$Y=-2$ 또는 $Y=6$

$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$

$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\quad x^4-4x^2-12$

$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

10. 방정식 $(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$의 두 허근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$에서

$x^2+x+2=A$라 하면

$A^2=A+2,$

$A^2-A-2=0,\ (A+1)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$

(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$

(i), (ii)에서 $\alpha,\ \beta$는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.

따라서, $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$

11. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

12. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$ ② $1 \leq k < 2$ ③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$ ⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \geq 0$

$\therefore\ k \leq \frac{1}{4}$

13. 방정식 $x^3-5x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)$

$=1+2-(-1)-5=-1$

14. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

15. a, b가 실수이고 방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 다른 한 근을 α라고 하면삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a\cdots$①

$(1+i)(1-i)+(1+i)\alpha+(1-i)\alpha=-4\cdots$②

$(1+i)(1-i)\alpha=-b\cdots$③

②에서 $\alpha=-3$

①, ③에 각각 대입하면 $a=1, b=6$

$\therefore a+b=7$

해설

[별해1] 계수가 실수이므로 $1+i$ 가 근이면 $1-i$ 도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 좌변은$\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=x^2-2x+2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나눗셈을 하여 정리하면

$x^3+ax^2-4x+b=(x^2-2x+2)(x+a+2)+(2a-2)x+b-2a-4$

$\therefore\ 2a-2=0,\ b-2a-4=0$

$\therefore\ a=1,\ b=6$

주어진 방정식에 $1+i$를 대입하여 복소수의 상등을 이용해도 된다.

16. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

세 근을 $1 - i, 1 + i, \gamma$ 라 하면

$(1-i)(1+i)\gamma = 4$, $2\gamma = 4$, $\gamma = 2$

$a = -(1 - i + 1 + i + 2) = -4$

$b = (1-i)(1+i) + (1+i)2 + 2(1-i) = 6$

$\therefore\ a + b = 2$

17. a, b가 유리수일 때, $x=1+\sqrt{2}$가 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 근이 된다. 이 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, α라 하면
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=3 \quad \cdots\cdots ㉠$
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1+\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=a \cdots\cdots ㉡$
$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b \quad \cdots\cdots ㉢$
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

18. 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega(2\omega-1)(\omega^2+2)$의 값은 ?

① $-\omega$　② ω　③ -3　④ 3　⑤ 5

해설

$x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \omega(2\omega-1)(\omega^2+2)$

$=(2\omega-1)(\omega^3+2\omega)$

$=(2\omega-1)(-1+2\omega)$

$=4\omega^2-4\omega+1$

$=4(\omega-1)-4\omega+1$

$=4\omega-4-4\omega+1$

$=-3$

19. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \overline{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\overline{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \overline{\omega}$, $(\overline{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$,

$x^2 + x + 1 = 0$ $\omega^3 = 1$,

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$,

$\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$

① $x^2 + x + 1 = 0$두근은

$\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega + \overline{\omega} = -1$(○)

② $x^2 + x + 1 = 0$두근은

$\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega \cdot \overline{\omega} = 1$(○)

③ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega \cdot \overline{\omega}$

$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$(×)

④ $\omega + \overline{\omega} = -1,$

$\overline{\omega} = -1 - \omega$

$= -(1 + \omega) = \omega^2$

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega = -1 - \overline{\omega} = -(1 + \overline{\omega})$

$= \overline{\omega}^2$(○)

⑤$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

20. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$w^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow \ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$의 한 허근이 ω

$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$

$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$

$= w^2 + w + 1$

$= 0$

21. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $1-2w+3w^2-4w^3+3w^4-2w^5$의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -4

해설

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω일 때

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1-2\omega+3\omega^2-4\cdot 1+3\omega^3\cdot\omega-2\omega^3\cdot\omega^2$

$=1-2\omega+3\omega^2-4+3\omega-2\omega^2$

$=\omega^2+\omega+1-4=-4$

$\therefore\ -4$

22. 두 다항식 $f(x)=x^3-5, g(x)=x^3+3x+1$에 대하여 $f(x)=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값은?

① 350 ② 351 ③ 352 ④ 353 ⑤ 354

해설

$f(x)=0$의 세 근이 α,β,γ 라고 하면 $\alpha^3=5, \beta^3=5, \gamma^3=5$ 이다.

$g(\alpha)=\alpha^3+3\alpha+1=3\alpha+6,\ g(\beta)=\beta^3+3\beta+1=3\beta+6,$
$g(\gamma)=\gamma^3+3\gamma+1=3\gamma+6\ g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$
$=(3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6)=351\ (\because \alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=5)$

23. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
> $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠)
> 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠)
> 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
$=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.

또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$

$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0=0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

24. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20%증가하였고, B제품은 25%증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

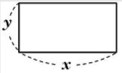
25. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots ㉠$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

26. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha - \beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$　　② $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$　　⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \to t = 2,\ 3$

ⅰ) $t = 2$일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ⅱ) $t = 3$일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

27. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0$, $t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\dfrac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x$, $x^2+x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$$

28. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ \ b=8-2k,\ \ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ \ a=2,\ \ b=0$

29. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　　② 6　　③ 5　　④ 4　　⑤ 3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4,\ \alpha\beta\gamma=-k$ 이므로

$\alpha+\beta=2-\gamma,\ \beta+\gamma=2-\alpha,\ \gamma+\alpha=2-\beta$

주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8-8-8+k=-k$

$\therefore\ k=4$

30. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3 이므로

$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$

$f(2x+3)$

$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$

3 차항과 2 차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$

$\therefore$ 세 근의 합 $=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을

각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,

$2p+3=\alpha \ \cdots$ ㉠

$2q+3=\beta \ \cdots$ ㉡

$2r+3=\gamma \ \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서

$2(p+q+r)+9=3$

$\therefore\ p+q+r=-3$

31. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α,β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

32. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore\ 2+c=5,\ 4+2c=a,\ 10-c=b$

$\therefore\ a=10,\ b=7,\ c=3$

33. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

ㄴ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

ㄷ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \quad \cdots ①$

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots ②$

ㄱ ①식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

ㄴ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1, \ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

ㄷ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

∴ ㄱ, ㄷ 맞음