

1. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = -2, b = -8$

② $a = 3, b = 4$

③ $a = -1, b = -3$

④ $a = 4, b = -2$

⑤ $a = -3, b = 7$

해설

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 로 놓으면
 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1) = 2 + a + b + 8 = 0,$$

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 8 = 0$$

$$\therefore a + b = -10, 2a + b = -12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -8$

2. $x^3 + ax^2 + bx - 4$ 는 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 라 하면

$$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = 3, b = -8$

$$\therefore a - b = 11$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

4. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1, x-2$ 로 나누어 떨어진다.

$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots \textcircled{\text{A}}$

$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 으로부터 $a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b = 0$

5. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 가 $(x-1)(x+2)$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하십시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = -2, b = -1$$

6. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ 을 일차식 $x - 1$ 로 나누어 떨어지도록 a 의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$$f(1) = 1 + a + 3 = 0, a = -4$$

7. x 에 대한 다항식 $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 7, b = -6$ ② $a = 6, b = -5$ ③ $a = 5, b = -3$
④ $a = 4, b = -5$ ⑤ $a = 3, b = 7$

해설

직접 나누면

몫이 $2x - 3$, 나머지가 $(a - 7)x + b + 6$ 이므로

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$$

$x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$$(a - 7)x + b + 6 = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

8. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x^2 - x - 12$ 로 나눈 나머지가 $14x - 9$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$= (x^2 - x - 12)Q(x) + 14x - 9$$

$$= (x - 4)(x + 3)Q(x) + 14x - 9$$

$x = 4$, $x = -3$ 을 각각 대입하면

$$16a + 4b + 67 = 47 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$9a - 3b - 24 = -51 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 3$

$$\therefore a + b = 1$$

9. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x) + 2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

12. 다항식 $f(x)$ 를 $(3x+2)(x-4)$ 로 나눈 나머지가 $-2x+1$ 일 때, $f(x^2+3)$ 을 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① 7

② 4

③ 0

④ -4

⑤ -7

해설

$$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x^3+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } x=4 \text{를 대입하면 } f(4) = -7$$

$$\textcircled{2} \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } f(4) = R$$

$$\therefore R = -7$$

13. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
 $f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0
② a_0
③ a_1
④ a_5
⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
 $\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
 $f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

14. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

- ① $3^{30} + 1$ ② $3^{30} - 1$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$
④ $\frac{1}{3}(3^{30} - 1)$ ⑤ 0

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

양변에 $x=3$ 을 대입 하면, $3^{30} = R$

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + 3^{30}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면, $1 = -2Q(1) + 3^{30}$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{2}(3^{30} - 1)$$

※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

15. 정식 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3 으로 나눌 때 $3x$ 가 남는다. $f(x)$ 를 x^2-5x+6 으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

- ① $6x-1$
- ② $6x-2$
- ③ $6x-3$
- ④ $6x-5$
- ⑤ $6x-9$

해설

$$f(x) = (x^2-3x+2)Q_1(x) + 3$$
$$= (x-1)(x-2)Q_1(x) + 3 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(x) = (x^2-4x+3)Q_2(x) + 3x$$
$$= (x-1)(x-3)Q_2(x) + 3x \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f(x) = (x^2-5x+6)Q(x) + ax + b$$
$$= (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서 } f(2) = 3 = 2a + b \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } f(3) = 9 = 3a + b \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\therefore \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤} \text{에서 } a = 6, b = -9$$

$$\therefore \text{나머지는 } 6x - 9$$

16. 다항식 $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x + \frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면 ?

- ① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \\ \therefore x \cdot f(x) &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx \\ &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\{axQ(x) + R\} - \frac{b}{a}R \end{aligned}$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x) + R$
나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \text{에서} \\ \text{나머지 정리에 의해 } f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R \\ x \cdot f(x) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)Q'(x) + R' \text{이라 하면} \\ \text{나머지 정리에 의해 } -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R' \\ f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R \text{를 대입하면 } R' = -\frac{b}{a}R \end{aligned}$$

17. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

18. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $xf(x)+3$ 을 $x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x), R$

② $Q(x), R+3$

③ $xQ(x), R$

④ $xQ(x), R+3$

⑤ $xQ(x)+R, R+3$

해설

$$f(x) = (x-1)Q(x) + R$$

$$\begin{aligned}xf(x) + 3 &= (x-1)xQ(x) + Rx + 3 \\&= (x-1)xQ(x) + R(x-1) + R + 3 \\&= (x-1)\{xQ(x) + R\} + R + 3\end{aligned}$$

$$\therefore \text{몫} : xQ(x) + R, \text{나머지} : R + 3$$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$ 를 $3x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x), R$

② $3Q(x), R$

③ $Q(x), 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x), R$

⑤ $Q(x), \frac{1}{3}R$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)Q(x) + R \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}Q(x) + R \\ &= (3x - 2)\frac{1}{3}Q(x) + R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

20. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$
- ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$
- ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
- ④ $2(3^{30}+1)$
- ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \textcircled{1}$$

이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.

①의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$$

으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은

$x=1$ 을 대입한

$$Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} \text{과 같다.}$$

따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R| \cdots \textcircled{2}$

한편 ①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$$

이 값을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} |Q(1)-R| &= \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2} \\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1) \end{aligned}$$

21. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1) 로 나누면 나머지가 $2x+4$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 x^3-1 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① x^2+x+3 ② x^2+2x+3 ③ $-x^2+x+3$
④ $-x^2+2x+3$ ⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x) = (x^3-1)Q(x) + ax^2+bx+c$ 라 하면
 $f(x)$ 를 (x^2+x+1) 로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c 에서 발생한다.
 $\therefore ax^2+bx+c = a(x^2+x+1) + 2x+4 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore f(x) = (x^3-1)Q(x) + a(x^2+x+1) + (2x+4)$
그런데 $f(1) = 3$ 이므로 $3a+6=3$
 $\therefore \textcircled{1}$ 에서 $b=1, c=3$
따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

22. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α 가 될 수 있는 상수항 -2 의 약수인 $\pm 1, \pm 2$ 을 준식에 차례로 대입해 보면

$$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0, 4a + b = -9$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0, 4a + b = 9$$

그런데, 위의 세 식은 a, b 가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 이고 } 4a + b = 9$$

$$\alpha = -2, a = 2, b = 1 (\because a > b)$$

$$\therefore \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$$