1. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$ 의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = -1,\ c = 2$
② $a = -1,\ b = 1,\ c = -2$
③ $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$
④ $a = -1,\ b = -1,\ c = -2$
⑤ $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.
$x = 0$ 을 대입 $-2 = -2a \quad \therefore\ a = 1$
$x = 1$ 을 대입 $-3 = 3b \quad \therefore\ b = -1$
$x = -2$ 를 대입 $12 = 6c \quad \therefore\ c = 2$

2. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

3. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

4. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x-2$, $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a+b$의 값은?

① -8　② -2　③ -16　④ 4　⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$
$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$
$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$
$\therefore a + b = 2$

5. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면
$f(2)=4a+2b+4=0\cdots\cdots$ ㉠
$f(-1)=a-b-5=6\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-8$
$\therefore\ a-b=11$

6. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$를 $x + 2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은?

① 0 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$라 놓자.
$f(-2) = 3$에서 $-2a + 9 = 3$
$\therefore\ a = 3$

7. 다항식 $f(x)$를 $(x+3)(x-6)$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$이었다. $f(x)$를 $(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x)=(x+3)(x-6)Q(x)+x-2$이므로
$f(-3)=-5$

8. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore \ a = 2$

9. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

10. 다항식 ax^3+bx^2-4 가 x^2+x-2로 나누어 떨어지도록 a, b를 정할 때, a와 b의 곱을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)Q(x)$
$=(x-1)(x+2)Q(x)$
양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면
$a+b-4=0,\ -8a+4b-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$
$\therefore\ ab=3$

해설

$ax^3+bx^2-4=(x^2+x-2)(ax+2)$
우변을 전개하여 계수를 비교하면
$a=1,\ b=3\ \therefore\ ab=3$

11. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+$ $b(x-1)+c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
양변에 $x=2,-2,1$을 각각 대입하면
$0=1+a+b+c,\ 0=-27+9a-3b+c,\ -9=c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3,\ c=-9$
$\therefore\ a(b+c)=5\times(3-9)=-30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$=x^3+2x^2-4x-8$
$=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & \\
 & & 1 & 3 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow c \\
 & & 1 & 4 & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow b & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow a & & \\
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c)=5(3-9)=-30$

12. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$　　② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$　　④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots ㉠$

$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots ㉡$

㉠ 에서 $f(x) = nQ(x)\frac{g(x)}{n} + R(x)$,

$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x),\ R'(x) = R(x)$

$\therefore\ Q'(x) = n \cdot Q(x), R'(x) = R(x)$

13. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우
$x = 1$ 을 대입한다.
$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$

14. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023　② 1024　③ 1025　④ 2046　⑤ 2050

해설

$x = 0$ 대입, $a_0 = 1$
$x = 1$ 대입, $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$
$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$

15. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$ 에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

16. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 m, n이라 하자. 이 때 $f(x)$를$(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$를 m과 n이 포함된 식으로 나타내면?

① $R(x)=(m-n)x+(m+n)$

② $R(x)=(m+n)x+(m-n)$

③ $R(x)=(m-n)x-(m+n)$

④ $R(x)=\dfrac{m-n}{2}x+\dfrac{m+n}{2}$

⑤ $R(x)=\dfrac{m+n}{2}x+\dfrac{m-n}{2}$

해설

주어진 조건으로 식을 세우면 각각 다음과 같다.

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+m$

$\quad\;=(x+1)Q_2(x)+n$

$f(x)=(x-1)(x+1)Q_3(x)+R(x)$

즉, $f(1)=R(1)=m \cdots$ ①

$f(-1)=R(-1)=n \cdots$ ②

$R(x)=ax+b$라 하면 ①,②에 의해

$a+b=m,\ -a+b=n$이므로

$a=\dfrac{m-n}{2},\ b=\dfrac{m+n}{2}$

$\therefore R(x)=\dfrac{m-n}{2}x+\dfrac{m+n}{2}$

17. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$f(2)=5$, $f(-2)=3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x+2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$f(2)=2a+b=5$, $f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2}$, $b=4$

18. x에 관한 정식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 5이고, $x-3$으로 나누면 나머지가 9라 한다. 이 정식을 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $4x+3$ ② $4x+1$ ③ $4x-1$

④ $4x-3$ ⑤ $4x-5$

해설

$f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면,

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=5$ ⋯⋯㉠

$f(3)=3a+b=9$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$, $b=-3$

$\therefore$ 나머지는 $4x-3$

19. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$에 대하여 $f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어 떨어지고 $f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어 떨어진다. 이 때, $a - 2b$의 값은 ?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$로 떨어지므로

$f(1) - 2 = 0 \ \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$

$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ①

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$로 나누어 떨어지므로

$f(-1) + 2 = 0 \ \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$ ②

㉠, ㉡ 에서 $a = 2,\ b = -1 \quad \therefore a - 2b = 4$

20. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

21. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \to 1985$년, $t = 1 \to 1990$년, $t = 2 \to 1995$년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \to 1990$년임을 알 수 있다.

22. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$ 에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

23. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

24. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28　　② 26　　③ 15　　④ 14　　⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ - ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ - ㉡

㉠ - ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

25. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

①+②에 의해

$2^{10}+2=2\left(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}\right)$

$\therefore\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)=2^9+1=513$

26. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$ ② $6x-2$ ③ $6x-3$
④ $6x-5$ ⑤ $6x-9$

해설

$f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+3$
$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+3 \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=(x^2-4x+3)Q_2(x)+3x$
$=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots\cdots$ ㉡
$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$
$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $f(3)=9=3a+b \cdots\cdots$ ㉤
$\therefore$ ㉣, ㉤에서 $a=6$, $b=-9$
$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

27. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면
$x=-1$을 대입하면 $R=29$
$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입
$31=2Q(1)+29$
$\therefore\ Q(1)=1$

28. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10　② -10　③ 9　④ -9　⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

29. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x\cdot f(x)$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x\cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

30. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \;\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \;\cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$$f(x)=(x^2+x+1)\frac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$$

$\therefore$ 나머지는 3

31. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 \ \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 \ \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times\, x =$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0 \therefore\ f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2(\because$ ①$)$

32. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　　② 9　　③ 13　　④ 17　　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

33. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, R ③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

34. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$
$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$
$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로
$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$
$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

35. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

36. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6,\ f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면 $f(x+1)-f(x-1)$ $= a_n\{(x+1)^n - (x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$ $= \boxed{}\, x^{n-1} + \cdots = 6x^2 + 6$ 에서 $n=3,\ a_n=1$ $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$ $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$ 이므로 $a_2=0,\ a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$

$= a_n\{(x+1)^n - (x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1}\}\cdots$

$= a_n\{(x^n + nx^{n-1} + \cdots) - (x^n - nx^{n-1} + \cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots) - (x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \cdots)\} + \cdots$

$= a_n(2nx^{n-1} + \cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2} + \cdots\} + \cdots$

$= 2na_n x^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$

$\therefore\ 2na_n x^{n-1} = 6x^2$에서

$n-1=2,\ 2na_n=6$

$\therefore\ n=3,\ a_n=1$

37. 다항식 $p(x)$는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}+\frac{d}{x-4}+\frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c, d, e는 상수)

㉠ $p(3) = 3$이면 $c = 3$이다.

㉡ $p(1) = p(5)$이면 $a = e$이다.

㉢ $b = 2$이면 $p(2) = -12$이다.

㉣ $a : bc = p(1) : p(2)p(3)$이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

주어진 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a+\frac{b(x-1)}{x-2}+\frac{c(x-1)}{x-3}+\frac{d(x-1)}{x-4}+\frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에 $x = 1$을 대입하면

$$a = \frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$$b = \frac{p(2)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)},\quad c = \frac{p(3)}{2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)},\quad d = \frac{p(4)}{3\cdot2\cdot1\cdot(-1)},\ e = \frac{p(5)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

따라서 ㉡, ㉢만 옳다.

38. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x)-g(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지가 $2x+4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$2f(x)-g(x)=(x^2+1)A(x)+R(x)$
$g(x)=(x^2+1)B(x)+R(x)$ 라 둘 수 있다.
따라서 $2f(x)=g(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$
$=(x^2+1)B(x)+R(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$
$=(x^2+1)\left\{A(x)+B(x)\right\}+2R(x)$
즉, $f(x)=(x^2+1)\dfrac{1}{2}\left\{A(x)+B(x)\right\}+R(x)$
$\therefore\ R(x)=2x+4$ 이고 $R(10)=24$

39. x에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$

$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①

①을 준식에 대입하면,

$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$

다시 $x=2$를 대입하면,

$2^n(4+a)=2^n\quad\therefore\ a=-3$

$a=-3$을 ①에 대입하면,

$b=(-2)(-3)-4=2$

$\therefore\ a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

40. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

(i) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+b)$
$= (x+2)^2Q(x) + 4^n(x+2)$

$f(-2) = 4^n(4-2a+b) = 0$
$\therefore\ b = 2a-4$

(ii) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$= x^{2n}(x+2)(x+a-2)$
$= (x+2)^2Q(x) + 4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2) = (x+2)Q(x) + 4^n$
$x=-2$ 를 대입하면
$4^n(-4+a) = 4^n$, $-4+a=1$
$\therefore\ a=5$
$b=2a-4$ 에서 $b=6$
$\therefore\ a+b=11$

41. 두 조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$의 개수는?

㈎ $f(0) = -1$
㈏ $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$이므로
$f(x) = ax^2 + bx - 1\ (a \neq 0)$라 하면
$f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$이다.
$f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$이라 하면,
$(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots$ ㉠
$a + bc - 1 = b \cdots$ ㉡
$b - c = 0 \cdots$ ㉢
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a+1) = 0$
$\therefore\ b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
$\therefore\ b = 2$ 또는 -1
$\therefore\ (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$의 3 쌍

42. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$　② $2^{22}+2^{11}-2$　③ $2^{21}-2^{10}+1$
④ $2^{21}+2^{10}-1$　⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면
$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$ ㉠
$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$
$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$

43. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$

④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면

$f(-2)=2^{100}=R$

$\therefore\ R=2^{100}$

$f(1)=3Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$

$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

44. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0)=0$이다.
㉡ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.
㉢ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$

㉠ $f(0)=-Q(0)=0$　　$\therefore$참

㉡ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참

㉢ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$

$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$　　$\therefore$거짓

45. 다항식 x^6을 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\frac{1}{64}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a=-\frac{1}{2}$로 놓으면

$R=a^6$

$x^6=(x-a)Q(x)+a^6$에서

$$Q(x)=\frac{x^6-a^6}{x-a}$$
$$=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a)=6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{3}{16}$

46. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3}+1$ ④ $\frac{x}{2}+1$ ⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$
$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$
이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면
$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는
$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로
$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서
$3ab^2x+b^3=x+1$
$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$
$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$
$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

47. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$ ② $3x^2+2x-5$ ③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$
④ x^2+2x-5 ⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.
$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$
$f(-3)=(-3-3)^2a=4$
$\therefore\ a=\frac{1}{9}$
$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

48. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $g(x) = f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지 $R(x)$에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $R(x)$는 0이다. ② $R(x)$는 일차식이다.

③ $R(x)$는 이차식이다. ④ $R(x)$의 상수항은 3이다.

⑤ $R(x)$의 상수항은 2이다.

해설

$f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$ 이고

$g(x) = f(x)Q(x) + R(x)$ 에서

$g(x) = (x-3)(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$

그런데 $g(x) = f(f(f(x)))$ 이므로

$g(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$g(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$g(3) = f(f(f(3))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$\therefore\ g(1) = a + b + c = 0,\ g(-1) = a - b + c = 0,$

$g(3) = 9a + 3b + c = 0$

$\therefore\ a = b = c = 0$

따라서 $R(x) = ax^2 + bx + c = 0$

49. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b (a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ± 1, ± 2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b)$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$

50. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & =e \\
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} & & =d \\
 & & 1 & 3 & & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} & & & =c \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
a= & 1 & \boxed{4} & =b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$