1. 자연수 n 에 대하여 원소가 $2n$ 개인 집합 S 에서 2 개의 원소를 뽑는 경우의 수 ${}_{2n}C_2$ 를 다음과 같은 방법으로 구하였다.

S 를 원소가 n 개이고 서로소인 두 집합 A 와 B 로 나누고, 다음과 같은 경우를 생각한다. (i) A 와 B 중 한 집합에서만 두 개의 원소를 뽑는 경우 (ii) A 와 B 각 집합에서 원소를 뽑는 경우 (i) 의 경우의 수는 (가) 이고 (ii) 의 경우의 수는 (나) 이다. (i) 과 (ii) 둘 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의법칙에 의하여 ${}_{2n}C_2 =$ (가) + (나) 이다.

위에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① ${}_nC_2 \times {}_nC_2$, ${}_nC_1 \times {}_nC_1$

② $2{}_nC_2$, ${}_nC_1 \times {}_nC_1$

③ $3{}_nC_2$, ${}_nC_1 \times {}_nC_1 - {}_nC_2$

④ $2{}_nC_2$, ${}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1$

⑤ ${}_nC_2 - {}_nC_1$, ${}_{2n}C_2$

해설

2. 10명의 주주 중에서 사장 1명, 부사장 2명을 뽑는 방법의 수는?

① 240 ② 280 ③ 360 ④ 480 ⑤ 720

해설

10명 중에서 사장 1명을 뽑는 가지수는 ${}_{10}C_1$,
나머지 9명 중에서 부사장 2명을 뽑는 가지수는 ${}_{9}C_2$
따라서 ${}_{10}C_1 \times {}_{9}C_2 = 360$

3. 3 개의 증권회사, 3 개의 통신회사, 4 개의 건설회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4 개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수는?

① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

해설

(i) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 2개, 1개, 1개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_2 \times _3C_1 \times _4C_1 = 36$(가지)

(ii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1개, 2개, 1개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times _3C_2 \times _4C_1 = 36$(가지)

(iii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1개, 1개, 2개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times _3C_1 \times _4C_2 = 54$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 $36 + 36 + 54 = 126$(가지)

4. 1 에서 10 까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는?

① 27 ② 35 ③ 54 ④ 62 ⑤ 70

해설

두 수의 곱은 '홀수× 홀수' 인 경우를 제외하고 모든 경우에 짝수이므로 전체에서 홀수만 2 개 뽑는 경우를 제한다.

${}_{10}C_2 - {}_5C_2 = 45 - 10 = 35$

5. 123456과 같이 자릿수가 낮을수록 각 자리의 숫자가 커지는 여섯 자리의 자연수의 개수는?

① 76 ② 80 ③ 84 ④ 86 ⑤ 88

해설

1 ~ 9 까지의 숫자 중에서 6개를 선택하여 자리수가 낮을수록 각 자리의 숫자가 커지도록 배열하면된다. ${}_9C_6 = 84$

6. 남자 5 명과 여자 6 명 중에서 남자 2 명, 여자 3 명을 뽑아 일렬로 세우는 방법은 몇 가지인가?

① 12000 ② 16000 ③ 20000

④ 24000 ⑤ 28000

해설

$_5C_2 \times _6C_3 \times 5! = 24000$

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$에서 X에서 Y로의 일대일함수의 갯수는?

① 12개 ② 24개 ③ 28개 ④ 32개 ⑤ 36개

해설

집합 Y의 원소 $4, 5, 6, 7$에서 서로 다른 세 개를 뽑아

$1 \rightarrow \square,\ 2 \rightarrow \square,\ 3 \rightarrow \square$

의 □ 안에 늘어놓는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

8. 대각선의 개수가 35 인 볼록 n 각형의 꼭짓점의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

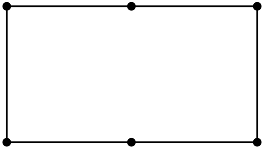
해설

$_{n}C_{2}-n=35$, $\dfrac{n(n-1)}{2\times 1}-n=35$,

$n^2-3n-70=0$, $(n-10)(n+7)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

9. 직사각형에 그림과 같이 6 개의 점을 찍었다. 이 점 중 4 개를 선택하여 만들 수 있는 사각형의 개수는?



① 8개 ② 9개 ③ 10개 ④ 11개 ⑤ 12개

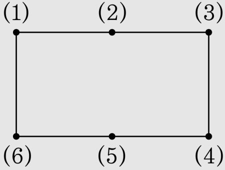
해설

(i) 6 개 중에서 4 를 선택할 가짓수는

$\Rightarrow {}_6C_4 = 15$

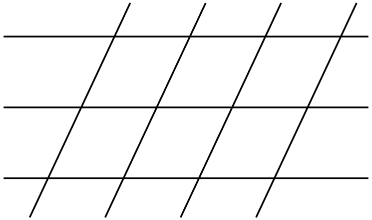
(ii) 사각형이 되지 않는 가짓수는 예를 들어

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5) 와 같이 6(가지)



$\therefore\ 15 - 6 = 9$ 가지

10. 다음 그림과 같이 3 개의 평행선과 4 개의 평행선이 만나고 있다. 이들로 이루어지는 평행사변형은 몇 개인가?



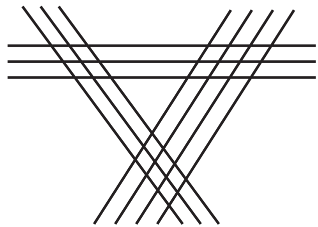
① 18 개 ② 24 개 ③ 28 개 ④ 32 개 ⑤ 36 개

해설

가로줄 중에서 2 개를 선택하고, 세로줄 중에서 2 개를 선택하면 평행사변형이 하나 정해진다.

${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$

11. 서로 평행한 3 개, 3 개, 4 개의 평행선이 오른쪽 그림과 같이 만나고 있다. 주어진 직선을 이용하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는?



① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

해설

평행한 직선을 두 쌍 택하면 평행사변형 하나가 결정된다.
가로 방향의 평행선들을 A, 세로 방향의 평행선 부분을 왼쪽부터 B, C 라 하면
(i) A, B 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$
(ii) A, C 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$
(iii) B, C 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$
(i), (ii), (iii) 에서 구하는 평행사변형의 개수는
$9 + 18 + 18 = 45$

12. 15명의 학생을 4명, 4명, 7명의 3조로 나누는 모든 방법의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 225225 가지

해설

$$ {}_{15}C_4 \times {}_{11}C_4 \times {}_{7}C_7 \times \frac{1}{2!} $$

13. 8 명의 사람이 3 대의 같은 자동차에 나누어 타려고 한다. 각각의 차에 고르게 분산하여 탑승하기 위해 3 명, 3 명, 2 명으로 나누어 타기로 한다고 할 때, 자동차를 탈 수 있는 방법의 수는?

① 115 ② 210 ③ 280 ④ 320 ⑤ 640

해설

$$ {}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 280 $$

14. 크기와 모양이 다른 9개의 구슬을 4개, 3개, 2개로 나누어 3명의 어린이에게 나누어 주는 방법의 수는?

① 7480 ② 7520 ③ 7560 ④ 7600 ⑤ 7640

해설

$_9C_4 \times _5C_3 \times _2C_2 \times 3! = 7560$

15. 서로 다른 네 개의 다리를 서로 다른 네 개의 건설 팀이 건설하는데 두 팀씩 2 개조로 나누어서 각 조가 2 개씩 나누어 맡아서 건설하기로 하였다. 건설하는 방법의 수는?

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

해설

서로 다른 4 개의 다리를 2 개씩 나누는 가지수는

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

서로 다른 네 개의 건설 팀을 두 팀씩 2 개조로 나누는 가지수

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

2 개조가 나누어진 2 개동 중 하나를 선택하는 가지수는 2가지

따라서, 건설하는 방법의 수는

$3 \times 3 \times 2 = 18$ (가지)이다.

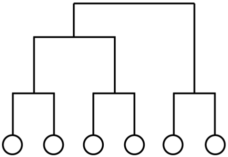
16. 서로 다른 6 송이의 꽃을 2 송이씩 3 다발로 나누어 3 명에게 선물하는 모든 방법의 수는?

① 45 ② 90 ③ 120 ④ 180 ⑤ 225

해설

$$_6C_2 \times_4 C_2 \times_2 C_2 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 90$$

17. 갑, 을, 병, 정, 무, 기의 여섯 팀이 다음 그림과 같은 대진표에 의해 축구경기를 하려고 할 때, 대진표를 작성하는 경우의 수는?



① 30　② 32　③ 35　④ 38　⑤ 45

해설

6팀 중에 먼저 2팀을 골라 $(4, 2)$ 팀으로 나눈다.
그 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$ (가지)
나머지 4팀이 한 쪽에서 시합을 하는 경우는
3가지이므로 구하는 경우의 수는
$15 \times 3 = 45$ (가지)

18. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. ${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{2n+1}$

ㄴ. ${}_{4n}P_{3}n = (3n)! \times {}_{4n}C_{n}$

ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ , ㄷ

해설

㉠ ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ 이므로

${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{3n} - (n-1) = {}_{3n}C_{2n+1}$ (참)

㉡ ${}_{n}C_{r} = \dfrac{{}_{n}P_{r}}{r!}$ 에서

${}_{n}P_{r} = r! \times {}_{n}C_{r}$

$$\begin{aligned} {}_{4n}P_{3n} &= (3n)! \times {}_{4n}C_{3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{n} (\text{참}) \end{aligned}$$

㉢ ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_{2n+1}C_{n+2} &= {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2} \\ &= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)} \\ &= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

19. A 지역에는 세 곳, B 지역에는 네 곳, C 지역에는 다섯 곳, D 지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

(i) 선택한 세 곳이 모두 A 지역일 경우 : 1 (가지)
(ii) 선택한 세 곳이 모두 B 지역일 경우 :
이는 B 지역의 네 곳 중 세 곳을 선택한 경우와 같다.
${}_4C_3 = 4$ (가지)
(iii) 선택한 세 곳이 모두 C 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_5C_3 = 10$ (가지)
(iv) 선택한 세 곳이 모두 D 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_6C_3 = 20$ (가지)
따라서, (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여
$1 + 4 + 10 + 20 = 35$ (가지)

20. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$

21. 인터넷 동호회 A, B의 회원 6명, 6명이 모여 연합동호회를 만들려고 한다. 연합동호회의 대표를 3명 정할 때, A동호회의 회원이 적어도 한 명 포함되는 경우의 수는?

① 160 ② 200 ③ 270 ④ 315 ⑤ 380

해설

적어도 동호회 A의 회원이 포함되는 경우의 수는 12명 중에서 3명을 택하는 조합의 수에서 대표 3명이 모두 동호회 B의 회원인 경우의 수를 제외하면 된다.
전체 12명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{12}\mathrm{C}_3$,
대표 3명을 모두 동호회 B에서 뽑는 경우의 수는 ${}_{6}\mathrm{C}_3$ 이므로
구하는 경우의 수는

$$
\begin{aligned}
{}_{12}C_3 - {}_6C_3 &= \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} - \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} \\
&= 220 - 20 = 200
\end{aligned}
$$

22. 여섯 개의 수 0, 1, 2, 3, 4, 5 가 있다. 이 중에서 서로 다른 네 개의 수를 뽑아서 네 자리 정수를 만들려고 한다. 이때, 십의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 작게 되는 네 자리의 정수는 모두 몇 개인가?

① 90개 ② 108개 ③ 120개 ④ 145개 ⑤ 150개

해설

네 자리수를 $A\ B\ C\ D$라 하면
A 자리에 올수 있는 수는 0 을 제외한 수이므로 5 개,
C 자리에 올 수 있는수는 A 에서 사용한 수를 제외하고
0 을 포함한 수이므로 5 개,
B 와 D 는 남아있는 4 개의 수중 큰 수와 작은 수를 구분해야 하므로 ${}_4C_2$,
따라서 구하는 개수는 $5 \times 5 \times {}_4C_2 = 150$ (개)

23. 대각선의 개수가 44 인 볼록 n 각형의 꼭짓점의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

n 각형의 대각선 개수 : ${}_nC_2 - n = 44$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44$$

$\Rightarrow n = 11$

따라서 꼭짓점의 개수 : 11

24. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

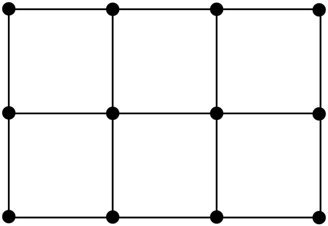
① 125　② 175　③ 275　④ 385　⑤ 495

해설

십이각형에서 4개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12 개의 꼭지점에서 4 개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.

$\therefore\ {}_{12}C_4 = 495$

25. 그림과 같이 같은 간격으로 놓인 12 개의 점이 있을 때, 이 중 3 개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 50 ② 100 ③ 150 ④ 200 ⑤ 300

해설

12 개의 점 중에서 3 개의 점을 선택하는 경우의 수에서 직선 위의 점 중 3 개의 점을 선택하는 경우의 수와 대각선의 수를 빼준다.

$\Rightarrow {}_{12}C_3 - (3 \times {}_4C_3 + 4 \times {}_3C_3) - 4 = 200$

26. 10 개의 직선이 있다. 이 중 3 개는 서로 평행하다. 그리고 어느 3 개도 같은 점에서 만나지 않는다. 이들 직선으로 만들어지는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 98 개

해설

삼각형은 세 개의 직선으로 결정되므로 10 개의 직선에서 3 개의 직선을 뽑을 경우의 수는 ${}_{10}C_3$ 가지이다. 이 중에서 평행한 세 개의 직선을 뽑거나, 평행한 두 개의 직선과 나머지 7 개의 직선 중에서 한 개의 직선을 뽑는 경우는 삼각형이 만들어 질 수 없다. 이런 경우의 수는

${}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1$ 가지이다.

따라서 삼각형의 개수는

${}_{10}C_3 - ({}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1) = 98$ (개)

27. 운전석을 포함한 4인용 승용차 3대에 10명이 나누어 타려고 한다. 운전 면허가 있는 사람이 3명이고 이들은 각각 지정된 승용차를 운전한다고 할 때, 10명이 차에 나누어 타는 방법의 수는?

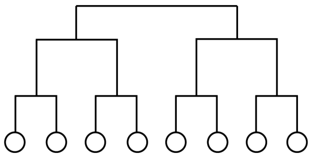
① 850 ② 880 ③ 920 ④ 1000 ⑤ 1050

해설

운전 면허증이 있는 사람은 각각 자신의 자동차로 가니까 나머지 7 명을 세 자동차에 분배해주면 된다.
분배명수는 4 인용 승용차이므로 $(3,3,1)$ 과 $(2,2,3)$ 의 형태 두가지 밖에 없다.
따라서 분배방법의 수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&{}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! \\
&+ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! \\
&= 1050
\end{aligned}
$$

28. 대한민국, 일본, 중국, 대만에서 대표 선수 2 명씩 총 8 명이 출전한 바둑대회가 열린다. 이 대회에서는 오른쪽 그림과 같은 대진표에 의해 토너먼트 방식으로 경기를 하여 우승팀을 가리기로 할 때, 같은 나라에서 출전한 선수끼리는 결승전 이외에는 만나지 않도록 대진표를 작성하는 경우의 수를 구하여라. (단, 대진표에서의 위치와는 상관없이 시합하는 상대가 같은 대진표는 같은 것으로 한다.)

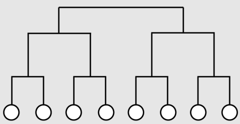


▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 72 가지

해설

대한민국의 대표선수를 각각 갑, 을이라 하면
대진표의 위치는 상관없으므로 갑, 을 두 선수를
다음 그림과 같이 배치해도 일반성을 잃지 않는다.



나머지 3 개국에서 갑과 같은 조에서 시합을 할
1 명씩을 뽑는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(가지)
이 때, 갑과 같은 조에 속한 3 명 중 갑과 첫 시합을 할 사람을
택하는 경우의 수는
${}_3C_1 = 3$(가지) 이고, 나머지 두 명은 자동으로
서로 첫 시합 상대가 된다. 한편, 을과 같은 조에
속할 나머지 3 명의 선수들은 갑과 같은 조에
속한 3 명을 제외한 나머지 3 명으로 이 경우의
수는 1 가지이다. 이 때, 을과 같은 조에 속한
3 명 중 을과 첫 시합을 할 사람을 택하는 경우의
수는 ${}_3C_1 = 3$(가지) 이고, 나머지 두 명은
자동으로 서로 첫 시합 상대가 된다.
따라서, 구하는 대진표의 경우의 수는
$8 \times 3 \times 1 \times 3 = 72$(가지)

29. 정수는 대학생이 되면 해외로 배낭여행을 하기로 하고, 가고 싶은 나라를 대륙별로 아래 표와 같이 적어보았다. 정수는 두 대륙을 여행하되 먼저 방문하는 대륙에서는 3개국을 여행하고, 두 번째 방문하는 대륙에서는 2개국을 여행하기로 하였다. 정수가 계획할 수 있는 배낭여행의 경우의 수를 구하여라. (단, 방문국의 순서는 고려하지 않는다.)

대륙	가고 싶은 나라
아시아	일본, 중국, 인도, 태국
유럽	프랑스, 이탈리아, 스페인, 그리스
아메리카	미국, 멕시코, 브라질
아프리카	이집트, 리비아, 튀니지

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 126가지

해설

(i) 4 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

$2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 = 2 \times 4 \times 6 = 48$

(ii) 3 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

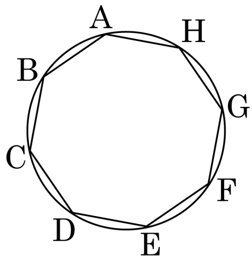
$2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2 = 2 \times 1 \times 3 = 6$

(iii) 4 개국이 있는 대륙과 3 개국이 있는 대륙을 여행하는 경우 :

$4 \times ({}_4C_3 \times {}_3C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 72$

이상을 정리하면 126

30. 원에 내접하는 팔각형에서 세 개의 꼭짓점을 이을 때 만들어지는 삼각형을 다음과 같이 구하고자 한다.

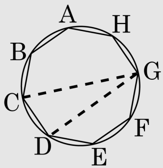


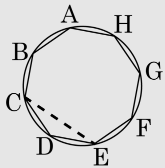
팔각형과 한 변을 공유하는 삼각형의 개수는 a 개, 팔각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 b 개, 따라서 팔각형과 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는 c 개이다. 위의 과정에서 $a+b-c$ 의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

해설

한 변을 공유하는 경우는 한 변마다 꼭짓점이
4 개씩 있으므로,
$4\times 8=32$(개) $\Rightarrow \quad a=32$
두 변을 공유하는 경우는 꼭짓점 한 개에 한 개씩
모두 8 (개) $\Rightarrow \quad b=8$
따라서 변을 공유하지 않는 삼각형은
${}_8C_3-32-8=16 \quad \Rightarrow \quad c=16$





$\therefore \ a+b-c=32+8-16=24$