1. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면
$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$
$\therefore$ $a \neq \pm 1$
따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는
a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

2. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x+0.5y=2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x+5y=28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x+3y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y=-8$
$\therefore\ y=2$를 ㉣ 대입하면 $x=3$
$\therefore\ x=3,\ y=2$

3. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다. (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10$, $\frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

4. x에 대한 두 이차방정식 $x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$의 공통근이 2이므로 $x=2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.
$2^2-2a+10=0$, $2^2+2+b=0$
$\therefore\ a=7,\ b=-6$
이 때, $x^2-7x+10=0$에서
$(x-2)(x-5)=0$이므로 $x=2,\ 5$
또, $x^2+x-6=0$에서
$(x-2)(x+3)=0$이므로 $x=2,\ -3$
따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은
$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

5. $|x+1|+|y-2|=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 곱 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x+1|\geq 0,\ |y-2|\geq 0$이므로 $x+1=0,\ y-2=0$
$\therefore\ x=-1,\ y=2$
따라서, 구하는 값은 $xy=-1\cdot 2=-2$

6. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서
$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로
$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서
$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3&=t^2-8t+12+3\\&=t^2-8t+15\\&=(t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$
$x^2+x-3=0$ 에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

$x^2+x-5=0$ 에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

7. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$의 실근이 1뿐일 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a>-\frac{3}{4}$　② $a>-\frac{3}{2}$　③ $a>-1$

④ $a>0$　⑤ $a>1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$의 근이 허근이거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(i) 허근을 가질 경우

$D=1-4(a+1)<0$, $-3<4a$

$\therefore\ a>-\frac{3}{4}$

(ii) $x=1$을 중근으로 가질 경우

$D=1-4(a+1)=0$이고 $1+1+a+1=0$을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a>-\frac{3}{4}$

8. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$ 을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 3 개　② 4 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

근과 계수와의 관계에서
$x,\ y,\ z$ 를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$

$\therefore\ (x, y, z)=$

$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$

$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$

$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2+6=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?

① -1　　② 3　　③ $-1,\ -3$

④ $1,\ 3$　　⑤ $-3,\ 1$

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4=(a+2)^2-2a^2-6 \geq 0$ 에서 $2-\sqrt{2} \leq a \leq 2+\sqrt{2}$ $\cdots$①

그런데 a 는 정수이므로 ①에서 $a=1,\ 2,\ 3$

i) $a=1$ 일 때 $x^2-6x+8=0$ 의 두 근은

$x=2,\ 4$ (조건을 만족)

ii) $a=2$ 일 때 $x^2-8x+14=0$ 의 두 근은

$x=4\pm\sqrt{2}$ (조건에 위배)

iii) $a=3$ 일 때 $x^2-10x+24=0$ 의 두 근은

$x=4,\ 6$ (조건을 만족)

i), ii), iii) 에서 $a=1,\ 3$