1. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a<-1$ ③ $a>\frac{3}{2}$

④ $a<\frac{3}{2}$ ⑤ $a>-2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

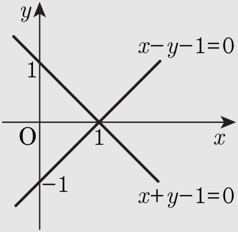
3. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

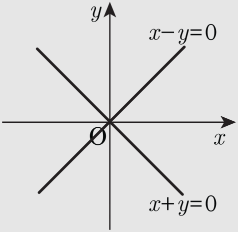
① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개

④ 2개 ⑤ 4개

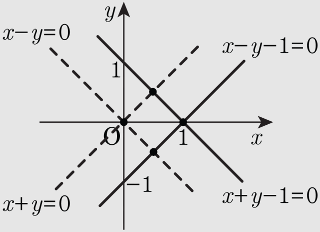
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

4. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h

④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x

3분간 간 거리 : $3x$

느린 학생의 분속 : y

3분간 간 거리 : $3y$

같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로

거리의 차는 200

$3x - 3y = 200$

반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로

거리의 합은 200

$x + y = 200$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \dfrac{400}{3}$m/분

$\Rightarrow \dfrac{400\text{m}}{3}$/분$= \dfrac{0.4\,\text{km}}{3} \times 60$/시간$= 8$ km/h

5. a, b는 실수라 한다. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+a^2x+b^2-2a=0$, $x^2-2ax+a^2+b^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0 \quad \cdots ①$

$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0 \quad \cdots ②$

① − ②하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$

$\therefore \ (a^2+2a)(\alpha-1)=0$

$\therefore \ a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $a^2+2a=0$일 때는 $a^2=-2a$이므로

두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

$\therefore \ \alpha=1$

①에 대입하면 $1+a^2+b^2-2a=0$

$\therefore \ (a-1)^2+b^2=0$

a, b는 실수이므로 $a-1=0$, $b=0$

$\therefore \ a+b=1$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 7 ⑤ ± 9

해설

$$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k \pm 5$

7. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y$, $y-1$은 실수이므로 $x+2y=0$, $y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

8. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0 \therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

9. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$ ② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$

③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$ ④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$

⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\left\{x^2+2(a+2)x-4a-1\right\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

10. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$$

$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

11. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $x^5+y^5=1$ ② $x^7+y^7=1$ ③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$ ⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5=x^3\times x^2+y^3\times y^2=-(x^2+y^2)=-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

12. $x^3=1$의 세 근이 a, b, c이다. $22a^{21}+21b^{22}+22c^{21}$의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60 ② 65 ③ 68 ④ 72 ⑤ 75

해설

$x^3=1 \quad \Rightarrow \quad a^3=1 \;\; b^3=1 \;\; c^3=1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \;\; 22a^{21}+21b^{22}+22c^{21}$

$=22(a^3)^7+21(b^3)^7b+22(c^3)^7$

$=21b+44$이 값이 실수이므로

①에서 $b=1$이다.

$\therefore \;\; 21b+44=65$

13. $\begin{cases} |x|+x+y=10 \\ x+|y|-y=12 \end{cases}$ 일 때, $x+y$의 값은?

① -2　　② 2　　③ $\frac{18}{5}$　　④ $\frac{22}{3}$　　⑤ 22

해설

$|x|+x+y=10$ ······ ㉠

$x+|y|-y=12$ ······ ㉡

$x \leq 0$ 이면, $y=10,\ x=12$

이것은 $x \leq 0$을 만족하지 않는다.

$x>0$ 이면 $2x+y=10$······ ㉢

$y \geq 0$ 이면 $x=12,\ y=-14$

이것은 $y \geq 0$을 만족하지 않는다.

$y<0$ 이면, $x-2y=12$······ ㉣

㉢, ㉣에서 $x=\frac{32}{5},\ y=-\frac{14}{5}$

$\therefore\ x+y=\frac{18}{5}$

14. 방정식 $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+5=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$ ······ ㉠

이 때, x 가 실수이므로

$\frac{D}{4}=(1-y)^2-\left(2y^2-6y+5\right)\geq 0$

$y^2-4y+4\leq 0,\ (y-2)^2\leq 0$

여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2=0$

$\therefore\ y=2$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=1\ \therefore\ \frac{y}{x}=\frac{2}{1}=2$

해설

주어진 식을 정리하면

$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$

$x^2+2(1-y)x+(1-y)^2+y^2-4y+4=0$

$\therefore\ (x+1-y)^2+(y-2)^2=0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y=0,\ y-2=0$

$\therefore\ x=1,\ y=2$

$\therefore\ \frac{y}{x}=2$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4\left(m^2-1\right)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4\left(m^2-1\right)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.