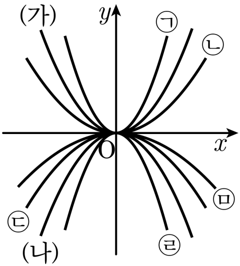
1. 다음 그림은 모두 꼭짓점이 원점인 포물선이고, $y = x^2$ ⋯(가), $y = -x^2$ ⋯(나)이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = -ax^2$ 의 그래프로 알맞은 것은?



① ㉠　② ㉡　③ ㉢

④ ㉣　⑤ ㉤

해설

$0 < -a < 1$ 이므로 (가)와 x 축 사이에 있는 그래프를 찾으면 ㉡이다.

2. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 m 만큼 평행이동하면 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 지난다고 할 때, m 의 값은?

① 4 ② 5 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

$y=-\frac{2}{3}x^2+m$ 에 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 대입하면

$-5=-\frac{2}{3}(-\sqrt{3})^2+m$

$\therefore m=-3$

3. 이차함수 $y=-3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5,-2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k,-3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ $-\frac{80}{3}$ ⑤ -10

해설

$y=-3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5,-2)$가 되도록 평행이동하면
$y=-3(x-5)^2-2$ 이고
$y=-3(x-5)^2-2$ 가 점 $(k,-3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3=-3(k-5)^2-2$, $3k^2-30k+74=0$ 이다.
상수 k 의 값의 곱은 $3k^2-30k+74=0$ 의 두 근의 곱과 같으므로 $\frac{74}{3}$ 이다.

4. 이차함수 $y = 2(x+p)^2 + \frac{1}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ a)$ 이고, 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$ 를 지난다. 이 때, 상수 $a,\ b,\ p$ 의 곱 abp 의 값은?

① $\frac{11}{3}$　② 13　③ $-\frac{11}{3}$　④ $\frac{13}{2}$　⑤ $-\frac{13}{2}$

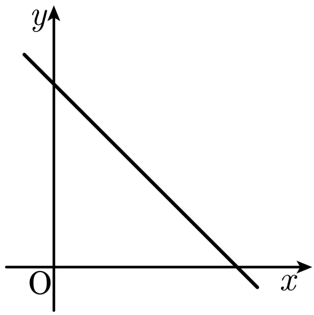
해설

$y = 2(x+p-1)^2 + \frac{1}{2}$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(1-p,\ \frac{1}{2}\right)$ 이므로 $1-p=2,\ p=-1,\ \ a=\frac{1}{2}$ 이다.

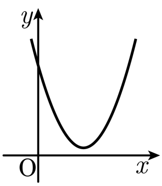
$y = 2(x-2)^2 + \frac{1}{2}$ 의 좌표가 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$ 를 지나므로 $b = 2\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + \frac{1}{2},\ \ b = 13$ 이다.

$\therefore\ abp = \frac{1}{2} \times 13 \times (-1) = -\frac{13}{2}$

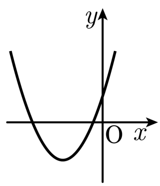
5. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



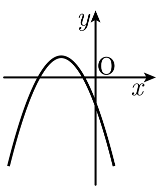
①



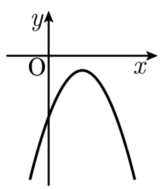
②



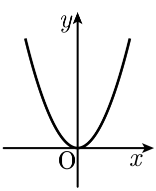
③



④



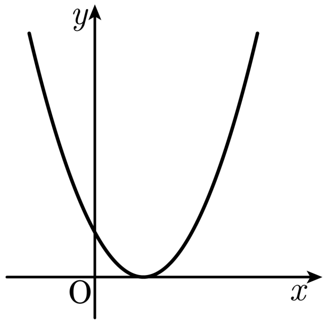
⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

6. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수 $y = p(x-q)^2 + a$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?



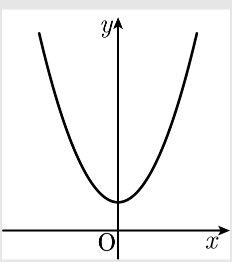
① 제1, 2 사분면 ② 제3, 4 사분면

③ 제1, 2, 4 사분면 ④ 제2, 3, 4 사분면

⑤ 제1, 2, 3, 4 사분면

해설

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 는 아래로 볼록하고, 꼭짓점 (p, q) 가 x 축 위에 있으므로 $a > 0$, $p > 0$, $q = 0$ 이다.
$y = p(x-q)^2 + a$ 의 그래프는 아래 그래프와 같다.
따라서 이차함수 $y = p(x-q)^2 + a$ 의 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2 사분면이다.



7. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y = -(x-2)^2$ ② $y = \dfrac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$

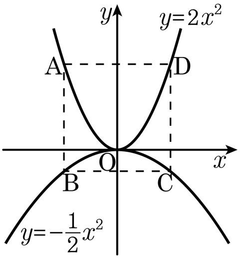
③ $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}$ ④ $y = -3x^2 + x$

⑤ $y = -\dfrac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
① 1
② 2
③ $\dfrac{1}{3}$
④ 3
⑤ $\dfrac{5}{2}$
이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

8. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위에 있는 네 점 A, B, C, D 가 정사각형을 이룰 때, 점 D 의 x좌표는?



① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점 D 의 좌표를 $(a, 2a^2)$ 이라 하면

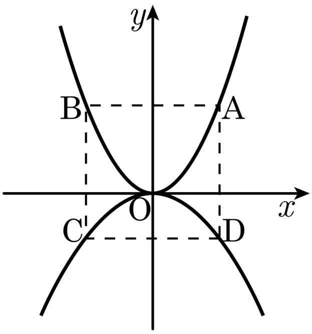
$\mathrm{B}\left(-a, -\frac{1}{2}a^2\right)$, $\mathrm{C}\left(a, -\frac{1}{2}a^2\right)$

$\overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$2a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 2a$, $5a^2 = 4a$

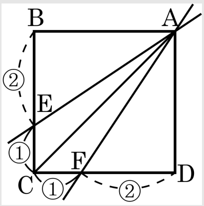
$\therefore a = \frac{4}{5} (\because a \neq 0)$

9. 두 함수 $y = x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$과 정사각형 ABCD에 대하여 점 A를 지나고 정사각형 ABCD의 넓이를 3등분하는 두 개의 직선의 기울기의 곱을 구하면?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설



위의 그림에서 A점의 x좌표를 구하면

$2a = \frac{3}{2}a^2$, $a = \frac{4}{3}$

$\therefore$ A$\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{9}\right)$

정사각형의 넓이는 $(2a)^2 = \frac{64}{9}$이므로 넓이가 삼등분되면 각 넓이는

$\frac{64}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{64}{27}$에서

$\frac{64}{27} = \frac{8}{3} \times ② \times \frac{1}{2}$

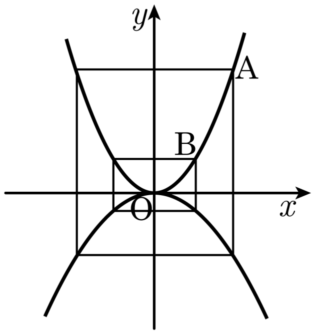
$② = \frac{16}{9}$

직선 AF의 기울기는 $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{9}} = \frac{3}{2}$

마찬가지 방법으로 AE의 기울기를 구하면 $\frac{2}{3}$

$\therefore$두 기울기의 곱은 $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$

10. 다음 그림과 같이 두 함수 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$에 대하여 두 직사각형이 서로 다른 닮음이다. A의 x좌표를 a, B의 x좌표를 b라 할때, ab의 값을 구하면?



① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

서로 같지 않는 닮음 이므로 큰 사각형의 가로와 작은 사각형의 세로가 대응변이다.

그러므로 $2a : \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{2}b^2 \ : \ 2b$에서

$\frac{9}{4}a^2b^2 = 4ab$

$\therefore ab = \frac{16}{9}$

11. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 $x < -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하고, $x > -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지날 때, 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 1)$ ② $(3,\ 5)$ ③ $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$

④ $(2,\ 5)$ ⑤ $\left(-1,\ \frac{2}{5}\right)$

해설

$x = -2$를 기준으로 x 값에 따른 y 값의 변화가 달라지므로, 축의 방정식은 $x = -2$, $\therefore a = 2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나므로 $3 = \frac{1}{2}(-1+2)^2 + b$, $\therefore b = \frac{5}{2}$

따라서 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$ 이다.

12. 이차함수 $y=-x^2-2x+p$ 의 그래프에서 x축과의 두 교점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y=-x^2-2x+p=-(x+1)^2+p+1$

축의 방정식이 $x=-1$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이므로

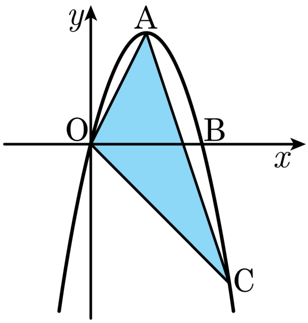
$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0), \mathrm{B}(1,\ 0)$

$\mathrm{B}(1,\ 0)$ 을 $y=-x^2-2x+p$ 에 대입하면 $-1^2-2+p=0,\ \therefore p=3$

$\therefore y=-(x+1)^2+4$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 4)$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 -1 이다.

13. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 가 되는 점 C 의 좌표는? (단, 점 A 는 꼭짓점, 점 B 는 포물선과 x 축과의 교점, 점 C 는 포물선 위에 있는 4 사분면의 점이다.)



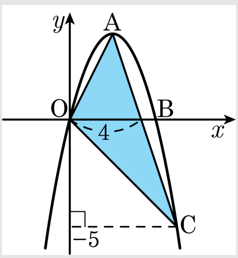
① (5, − 5) ② (4, − 3) ③ (6, − 2)
④ (2, − 8) ⑤ (3, − 4)

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ 이므로 꼭짓점 A(2, 4)
또한 $y = 0$ 일 때, $0 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

따라서 점 B(4, 0) 이다. $\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

$\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 이므로 $\triangle OBC$ 의 넓이는 10 이다.



$\triangle OBC$ 의 밑변을 $\overline{OB} = 4$ 라고 하면 높이는 5 가 된다. 즉 점 C 의 y 좌표가 -5 이다.
점 C 의 x 좌표를 c 라고 하면 $-c^2 + 4c = -5$
$c^2 - 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c-5)(c+1) = 0$, $c > 0$ 이므로 $c = 5$
$\therefore C(5, -5)$

14. 다음 중 이차함수에 대한 설명이 옳지 <u>않는</u> 것은?

① $y = x^2$ 에서 $x > 0$ 일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다.

② $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$를 축으로 하고 점 $(0,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

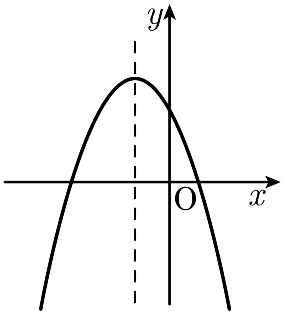
④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$의 값이 같으면 폭도 같다.

⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a가 커지면 폭이 넓어진다.

해설

① 아래로 볼록이므로 축의 오른쪽(축보다 큰 범위)에서 x값이 증가하면 y값도 증가한다.
② $x = 0$(y축)을 축으로 하고, $(0,\ b)$를 꼭짓점으로 한다.
③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.
④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서의 $|a|$의 값이 같으면 폭도 같다.
⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때 a가 커지면 $|a|$이 작아지므로 폭은 넓어진다.

15. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y=cx^2+ax+b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면 ② 제2 사분면 ③ 제3 사분면

④ 제4 사분면 ⑤ 답이 없다.

해설

$a<0,\ c>0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$ 에서 $b<0$ $\therefore\ a<0,\ b<0,\ c>0$

$y=cx^2+ax+b$ 에서

(1)$c>0$ 이므로 아래로 볼록

(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y=c\left(x^2+\frac{a}{c}x+\frac{a^2}{4c^2}-\frac{a^2}{4c^2}\right)+b$$
$$=c\left(x+\frac{a}{2c}\right)^2-\frac{a^2}{4c}+b\text{이므로}$$

축 : $-\dfrac{a}{2c}>0$

(3)y 절편 : $b<0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4 사분면에 있다.