1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다 ② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수 ④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설
$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0,\ \left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

3. 모든 실수 x에 대하여 x^2+ax+a가 -3보다 항상 크기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $-4<a<3$　② $-2<a<4$　③ $-2<a<6$

④ $2<a<4$　⑤ $2<a<6$

해설

$x^2+ax+a>-3, x^2+ax+(a+3)>0$
모든 실수 x에 대하여 성립하려면
이차방정식 $x^2+ax+(a+3)=0$의 판별식을
D라 할 때,
$D<0$이어야 하므로
$D=a^2-4(a+3)<0$
$a^2-4a-12<0, (a-6)(a+2)<0$
$\therefore -2<a<6$

4. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 일 때 부등식 $cx^2-bx+a>0$ 의 해는?

① $x<-\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>-\frac{1}{\beta}$
② $x<-\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$
③ $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$
④ $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$
⑤ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ 이므로
$a<0$ 이다. 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$
$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta>0$
$\therefore\ b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$
따라서 $cx^2-bx+a>0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$
$\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$
$(\alpha x+1)(\beta x+1)<0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$ $(\because 0<\alpha<\beta)$

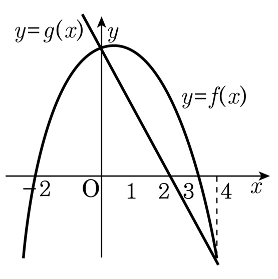
5. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k < x-2 < k$
$-k+2 < x < k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0 < k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$　④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

7. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a > 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a > -\frac{1}{2}$ ③ $a > -\frac{1}{3}$
④ $a > -\frac{1}{4}$ ⑤ $a > -\frac{1}{5}$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$에서

i) $a = 0$이면 $x > 0$
$\therefore$ 실수해가 존재한다.
ii) $a > 0$ 이면 $y = ax^2 + (a+1)x + a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로
$ax^2+(a+1)x+a > 0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.
iii) $a < 0$이면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 > 0$
$3a^2 - 2a - 1 < 0$, $(3a+1)(a-1) < 0$
$\therefore \ -\frac{1}{3} < a < 1$, $a < 0$ 이므로 $-\frac{1}{3} < a < 0$

i), ii), iii) 에서 $a > -\frac{1}{3}$

8. 이차부등식 $x^2 - |x| - 6 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

① 5　② 10　③ 13　④ 16　⑤ 18

해설

$x \geqq 0$일 때

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x+2)(x-3) < 0$

$-2 < x < 3$　　$\therefore 0 \leqq x < 3$

$x < 0$일 때

$x^2 + x - 6 < 0$에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$-3 < x < 2$　　$\therefore -3 < x < 0$

$\therefore -3 < x < 3$이므로 $a = -3,\ b = 3$

따라서 $a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$

9. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$
③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$
⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$
$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$
$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$
$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15　② 17　③ 19　④ 20　⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) <0

양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로

(두 근의 곱) <0이므로

$-a+1<0 \quad \therefore a>1\cdots$①

(두 근의 합) ≥ 0이므로

$-(a^2-5a-6)\geq 0$

$a^2-5a-6\leq 0$

$(a-6)(a+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 6\cdots$②

①,②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

12. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$인 직사각형의 넓이를 $35\,\text{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $9\,\text{cm}$ ② $10\,\text{cm}$ ③ $12\,\text{cm}$ ④ $15\,\text{cm}$ ⑤ $19\,\text{cm}$

해설

한 변의 길이가 a이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$이다.
$a(12-a) \geq 35$에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$
$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $12\,\text{cm}$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x + 4$의 그래프가 직선 $y = 3x + 10$ 보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위가 $x < a$ 또는 $x > b$일 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은? (단, $a < b$ 이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x + 4 > 3x + 10$에서 $x^2 - x - 6 > 0,\ (x+2)(x-3) > 0$
$\therefore x < -2$ 또는 $x > 3$
따라서, $a = -2,\ b = 3$ 이므로 $a + b = 1$

14. 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1<x<\frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m,n 의 곱 mn 의 값은?

① -6　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3,\ n=-2$
$\therefore\ mn=6$

15. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \ge a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$ ② $-2 \le a \le 2$ ③ $0 \le a \le 4$
④ $2 \le a \le 4$ ⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore\ 2 \le a \le 4$