1. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$
$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -3$
제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -2$
제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$
$\therefore\ 1,\ 2$
$\therefore$ 공통근 : $x=1$

3. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2+x-12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

4. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$
$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$
가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$
$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

5. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2 ② $-1 + \sqrt{2}$, -3 ③ $1 - \sqrt{2}$, 3
④ $1 - \sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

8. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

9. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4　② -4　③ -2　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

10. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

11. 4차방정식 $x^4+2x^2+4x+8=0$을 $(x^2+a)^2-(2x+b)^2=0$꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1\pm\sqrt{3}i$ ② $1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $-1\pm\sqrt{3}i$
④ $-1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $-1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$(x^2+a)^2-(2x+b)^2$
$=x^4+(2a-4)x^2-4bx+a^2-b^2$
이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로
$2=2a-4,\ 4=-4b,\ 8=a^2-b^2$
$\therefore a=3,\ b=-1$
따라서 주어진 4차방정식은
다음과 같이 변형하면,
$(x^2+3)^2-(2x-1)^2=0$
$\therefore\ (x^2-2x+4)(x^2+2x+2)=0$
$\therefore\ x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1\pm i$

12. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

13. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

14. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ 의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$ 이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$ 이 된다.

15. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$
$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$
세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$
$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

16. a, b가 실수일 때, 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 이면 $a+b$의 값은?

① 7 　 ② 8 　 ③ 9 　 ④ 10 　 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

$(1+i)+(1-i)+\alpha = -a$

$\therefore\ 2+\alpha = -a \cdots$ ①

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+(1+i)\alpha = -4$

$\therefore\ 2+2\alpha = -4 \cdots$ ②

$(1+i)(1-i)\alpha = -b$

$\therefore\ 2\alpha = -b \cdots$ ③

①, ②, ③에서 $\alpha = -3,\ a = 1,\ b = 6$

$\therefore\ a+b = 7$

17. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

18. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 한 근은 $3+\sqrt{2}$이다. 유리수 p, q의 값을 구했을 때, $p+q$의 값은?

① 6　　② 10　　③ -2　　④ -1　　⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 세 근은 $3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3+\sqrt{2}) + (3-\sqrt{2}) = 7$

$\therefore\ \alpha = 1$

$p = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) + \alpha(3-\sqrt{2}) + \alpha(3+\sqrt{2}) = 7+6 \quad \therefore\ p = 13$

$-q = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore\ q = -7$

$\therefore\ p + q = 13 - 7 = 6$

19. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

20. α, β를 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10} + (\beta^2+1)^{10}$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$의
두 허근이 α, β라면,
$x^2 + x + 1 = 0$의 두 허근이 α, β이다.
$\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = 1$
$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, $\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = 0$,
$\frac{1}{\alpha} + 1 = -\alpha$
$\beta^2 + \beta + 1 = 0$,
$\beta^2 + 1 = -\beta$
$\alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$

$$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10} + \left(\beta^2+1\right)^{10}$$
$$= (-\alpha)^{10} + (-\beta)^{10}$$
$$= \alpha^{10} + \beta^{10}$$
$$= (\alpha^3)^3\alpha + (\beta^3)^3\beta$$
$$= \alpha + \beta = -1$$

21. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\mathrm{cm})$

22. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7　② 11　③ 15　④ 19　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ 이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

23. 방정식 $x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30　　② 25　　③ 23　　④ 18　　⑤ 13

해설

$x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2=y$ 라고 치환하여 $y^2-ay+8-a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

ⅰ) $D=a^2-4(8-a)=a^2+4a-32=(a+8)(a-4)>0$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>4$

ⅱ) $a>0$

ⅲ) $8-a>0 \Rightarrow a<8$

$\therefore 4<a<8$ 이므로 $a=5,\ 6,\ 7$

24. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$

25. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$양변을

x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$

이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,

$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로

실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.

$\therefore a+b=4$

26. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+8x+17+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+17=0$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+5\right)=0$

$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

27. 방정식 $x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B=0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α,β라 하자. 이 때, $A+B-\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)=x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B$라 하면 $-1,-2$가 근이므로
$f(-1)=1-A-7+A+3B=0$
$\therefore\ B=2$
$f(-2)=16-8A-28+2A+3B=0$, $-6A+3B-12=0$ $\therefore\ A=-1$
$\therefore\ A+B=-1+2=1\cdots\cdots$ ㉠
$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2-4x+3)=0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2-4x+3=0$의 근이다.
$\therefore\ \alpha\beta=3\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $A+B-\alpha\beta=1-3=-2$

28. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{3}{4}$　③ -1　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$, $\alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$= \frac{-2-\alpha}{\alpha} + \frac{-2-\beta}{\beta} + \frac{-2-\gamma}{\gamma}$

$= -2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3$

$= -2\left(\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right) - 3 = -\frac{3}{2}$

29. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

30. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3-ax-3=0$의 세 근일 때, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3-ax^2+1=0$ ② $x^3-ax-3=0$
③ $3x^3+ax^2+1=0$ ④ $x^3+ax+3=0$
⑤ $3x^3-ax^2-1=0$

해설

x^3-ax-3
$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$=0$에서
$\alpha+\beta+\gamma=0,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a,\ \alpha\beta\gamma=3$

$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma},$

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha},$

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}=-\frac{\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\beta}$

따라서, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를
세 근으로 하는 방정식은

$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$

$=x^3+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$=x^3+\left(-\frac{a}{3}\right)x^2+\frac{1}{3}=0$

$\therefore\ 3x^3-ax^2+1=0$

31. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1　　② ω　　③ $-\omega$　　④ 2ω　　⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200} \\
&= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2 \\
&= -\omega^2+\omega^2=0
\end{aligned}
$$

32. x에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + 3a - 2 = 0$이 허근을 갖고 이 근의 세제곱은 실수이다. 이 때, 실수 a값들의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

한 허근을 x라 하면 $x^3 = b^3$ (b는 실수)라 할 수 있다.

$x^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow (x-b)(x^2 + bx + b^2) = 0$

$x^2 + ax + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + b^2 = 0$

$a = b, 3a - 2 = b^2$

두 식을 연립해서 풀면 $a = 1, 2$

해설

$x^2 = -ax - 3a + 2$ $x^3 = -ax^2 - (3a-2)x$

$x^3 = k$ (실수)라 하면 $k = -a(-ax - 3a + 2) - (3a-2)x$

$(a^2 - 3a + 2)x + 3a^2 + 2a - k = 0$

x가 허수이므로 $a^2 - 3a + 2 = 0$

$(a-1)(a-2) = 0$

$\therefore\ a = 1, 2$

33. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡
$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢
㉠, ㉡에서
$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣
$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=20$
$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$
$t=1,\ -2,\ 3$
$x<y<z$이므로 $x=-2$ $y=1$ $z=3$
$\therefore\ x-2y+z=-1$