1. x축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-2=0$까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라 할 때 $-ab$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\alpha-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$\therefore |2\alpha+1|=|\alpha-2|$

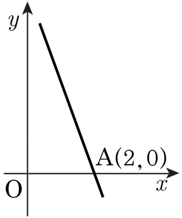
$\therefore 2\alpha+1=\pm(\alpha-2)$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3},\ -3$

$\therefore \left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(-3,\ 0)$이므로

$-ab=-\frac{1}{3}\times-3=1$

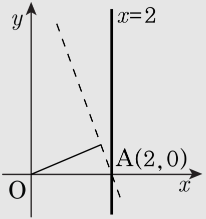
2. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

3. O를 원점으로 하는 좌표평면 위의 두 직선 $l_1 : mx - y = 0$, $l_2 : x + my - m - 2 = 0$이 있다. 임의의 실수 m에 대하여 직선 l_2가 지나는 정점을 A라 하고, 두 직선 l_1, l_2의 교점을 P라 할 때, $\triangle$OAP의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

해설

$l_2 : x + my - m - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 + m(y - 1) = 0$
따라서 l_2는 m의 값에 관계없이
$(2, 1)$을 지난다.
$l_1 : mx - y = 0$은 m의 값에 관계없이
원점 O를 지나고 또한
$m \cdot 1 + (-1) \cdot m = 0$이므로
l_1과 l_2는 서로 직교한다.
따라서 점 P는 $\overline{\text{OA}}$를 지름으로 하는
원 위에 존재하고 이 때, 점 P에서
$\overline{\text{OA}}$에 내린 수선의 길이의 최댓값은
곧, 반지름의 길이이므로, $\triangle$OAP 의 최댓값은

$$\triangle \text{OAP} \le \frac{1}{2} \cdot \overline{\text{OA}} \cdot \frac{\overline{\text{OA}}}{2} = \frac{1}{4}\overline{\text{OA}}^2 = \frac{5}{4}$$

4. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0$, $x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$　③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　④ $\dfrac{3}{5}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$$ 정리하면

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{a}x-\dfrac{2}{a} \\ y=\dfrac{1}{a-3}x-\dfrac{3}{a-3} \end{cases}$$ 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{a-3}$$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 $x-3y-3=0$과의 거리는

$$\therefore\ \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

5. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 또는 2 ③ 4

④ -2 또는 4 ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4