1. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$
② $(x+y)(x-y-1)$
③ $(x-y)(x-y-1)$
④ $(x+y)(x+y-1)$
⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2+y^2+2xy-x-y$
$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$

2. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$
② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$
④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

3. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$ ② $a - b^2$ ③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$ ⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$
$= a^3 - b^3 + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab)$
$= (a-b)(a^2 + b^2 + c^2)$

4. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

5. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1)-6 \\ &= X^2+X-6 \\ &= (X+3)(X-2) \\ &= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

6. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $a^2+b^2-c^2-2bc$
⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$
$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

7. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

8. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

9. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

10. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$

$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$

$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$

$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

11. $x^2+xy-2y^2-2x-y+1$을 인수분해하면?

① $(x+y-1)(x+2y-1)$ ② $(x-y-1)(x+2y-1)$
③ $(x-y+1)(x+2y-1)$ ④ $(x-y-1)(x+2y+1)$
⑤ $(x+y+1)(x+2y-1)$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$

$=\{x-(y+1)\}\{x+(2y-1)\}$

$=(x-y-1)(x+2y-1)$

12. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$　　② $2x - y + 2$　　③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$　　⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y+4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)$

$= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

13. 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x+2y+1$　② $x+y-3$　③ $2x+3y+2$
④ $x+y-2$　⑤ $2x+3y-1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)$
$=(x+y-2)(x+2y+1)$

14. $\dfrac{11^6-1}{11^2(11^2+1)+1}$ 의 값을 구하면?

① 119 ② 120 ③ 121 ④ 122 ⑤ 123

해설

$\dfrac{(11^2)^3-1}{(11^2)^2+(11^2)+1}$

$=\dfrac{(11^2-1)\{(11^2)^2+(11^2)+1\}}{(11^2)^2+(11^2)+1}$

$=11^2-1=(11+1)(11-1)=120$

15. $11 \cdot 13^3 + 33 \cdot 13^2 + 33 \cdot 13 + 11$ 의 인수가 아닌 것을 고르면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ 14 ⑤ 22

해설

$11 = a$, $13 = b$ 라 하면
$a \cdot b^3 + 3ab^2 + 3ab + a$
$= a(b^3 + 3b^2 + 3b + 1)$
$= a(b+1)^3 = 11 \cdot 14^3$
$= 11 \times 2^3 \times 7^3$

16. 가로의 길이가 $x$cm, 세로의 길이가 y cm, 높이가 $z$cm 인 직육면체에서 $x+y+z=10,\ x^2+y^2+z^2=46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① $45\,\mathrm{cm}^2$　② $50\,\mathrm{cm}^2$　③ $54\,\mathrm{cm}^2$
④ $58\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $60\,\mathrm{cm}^2$

해설

공식 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy+yz+zx=27$
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$ 이므로 54

17. 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 곱이 $2x^3+ax^2+bx+3$일 때, $a-b$의 값은?(단, a, b는 상수)

① -3　② 3　③ -1　④ 1　⑤ 0

해설

두 다항식은 $(x-1)p, (x-1)q(p, q$은 서로 소)라 할 수 있다.
두 다항식의 곱은 $(x-1)^2pq = 2x^3+ax^2+bx+3$
즉, $2x^3+ax^2+bx+3$는 $x-1$로 나눌 때 연속으로 나누어 떨어진다.
조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & a & b & 3 \\ & & 2 & a+2 & a+b+2 \\ \hline 1 & 2 & a+2 & a+b+2 & a+b+5=0 \\ & & 2 & a+4 & \\ \hline & 2 & a+4 & a+b+6=0 & \end{array}$$

$a+b=-5, 2a+b=-6$을 연립하여 풀면
$a=-1, b=-4$
$\therefore\ a-b=3$

해설

$(x-1)^2(2x+k) = 2x^3+ax^2+bx+3$
$(x^2-2x+1)(2x+k) = 2x^3+ax^2+bx+3$
상수항을 비교하면 $k=3$
이차항의 계수를 비교하면 $3x^2-4x^2=ax^2$
$\therefore\ a=-1$
일차항의 계수를 비교하면
$-6x+2x=bx \therefore\ b=-4$
$\therefore\ a-b=3$

18. 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이고 최소공배수가 x^3-2x^2-x+2일 때, 두 다항식의 곱을 $f(x)$라 하면 $f(3)$의 값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(x+1)$에서 두 다항식은
$(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$
$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$
두 다항식의 곱 : $(x-2)^2(x-1)(x+1)=f(x)$
$f(3)=(3-2)^2(3-1)(3+1)=2\cdot 4=8$

해설

최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하면
(두 식의 곱)$=GL$
$\therefore$두 식의 곱 $f(x)$
$=(x-2)(x^3-2x^2-x+2)f(3)=8$

19. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6일 때 두 이차식을 구하면?

① $\begin{cases} x^2+x-3 \\ x^2+5x+1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+x-6 \\ x^2+4x+3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+x-2 \\ x^2-x+3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x^2+2x-3 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2+4x+3 \\ x^2-x-6 \end{cases}$

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$에서
x^2+2x-3, x^2+5x+6

20. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 2$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

21. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18) + 21x^2 \\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\} + 21x^2 \\ &= (x^2-18)^2 - 4x(x^2-18) - 21x^2 + 21x^2 \\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore\ pg = (-18)\times(-4) = 72$

22. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　② $2(a+b)^n$　③ 4　④ $4(a+b)^n$　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

23. $2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x+ay+b)(2x+cy+d)$가 된다고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$ (← x에 관하여 정리)
$=2x^2+(y+10)x-(y^2-4y-12)$
$=2x^2+(y+10)x-(y+2)(y-6)$
$=\{x+(y+2)\}\{2x-(y-6)\}$
$=(x+y+2)(2x-y+6)$
$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=6$
$\therefore\ a+b+c+d=8$

24. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

25. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$
\begin{aligned}
&ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)\\
&=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2\\
&=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)\\
&=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=-(b+c)(a-b)(a-c)\\
&=(a-b)(b+c)(c-a)
\end{aligned}
$$

26. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

27. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형　　② 직각삼각형

③ 이등변삼각형　　④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$

$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$

$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

$(a+b \neq 0)$

$c^2 - a^2 - b^2 = 0$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ C = 90^\circ$인 직각삼각형

28. a, b, c가 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$

$a^2(a+b) - b^2(a+b) - c(a^2 - b^2) = 0$

$(a+b)(a^2 - ac + bc - b^2) = 0$

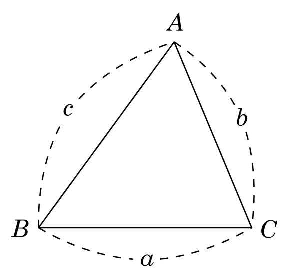
$(a+b)\{((a-b)(a+b) - c(a-b)\} = 0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c) = 0$

$a+b > 0, a+b-c > 0$이므로 $a = b$

$\therefore a = b$인 이등변삼각형

29. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle$ABC에서 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?



① $a=b$인 이등변삼각형
② $a=c$인 이등변삼각형
③ $\angle$A $=90^\circ$인 직각삼각형
④ $\angle$B $=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ $\angle$C $=90^\circ$인 직각삼각형

해설

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$
$=0$
이 때, a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$
$\therefore\ a^2-b^2-c^2=0$,
즉 $a^2=b^2+c^2$
따라서, $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형,
즉 $\angle$A $=90^\circ$인 직각삼각형이다.

30. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

31. $a-b=1+i$, $b-c=1-i$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a-b=1+i$ ⋯⋯㉠
$b-c=1-i$ ⋯⋯㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=2$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{1+2i-1+1-2i-1+4\}$
$=2$

32. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $x=a-2b+3c$,$y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

33. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　　② $x - 1$　　③ x

④ $x + 1$　　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$
\begin{aligned}
&\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7 \\
&= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\
&= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\
&= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\
&= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\
&= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

34. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ 2

해설

$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$\quad = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.

$\therefore$ 다항식 $C(\pm 1) = 0$

$\therefore\ C(1) = -a + b + 4 = 0,\ C(-1) = a + b + 4 = 0$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4$에서 $a + b = -4$

35. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> $A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk,\ a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(   ) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수
② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수
④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

$A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk,\ a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

36. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$　　② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$　　④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ $(\because a+b+c=k)$

37. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$ ② $(ax+by)^2$

③ $(bx+ay)^2$ ④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$

⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$=bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$
$=bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$
$=(a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$
$=(bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=(bx+ay)(ax+by)^2$
따라서, (준 식)$=(ax+by)^2$

38. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$

④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$
$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$
$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$
$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$
$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠
$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡
$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢
$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$
㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$
㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

39. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$　② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$　③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$
④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$　⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로
$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{100}$, $c = -1$ 이라 하면
$a+b+c=0$ 이 된다.
따라서 $a+b+c=0$ 이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$
임을 이용하면
$a^3+b^3+c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3$ 의 값은
$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1)$ 와 같으므로
구하는 값은
$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

40. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4 - y^4)(x+y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x-y)z^4 = 0$이 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z = x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y = z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x = y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4 - y^4)(x+y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x-y)z^4$
$= (x-y)(x+y)^2(x^2+y^2) - 2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2 + (x-y)z^4$
$= (x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2) - 2(x^2+xy+y^2)z^2 + z^4\}$
$= (x-y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xyz^2 - 2y^2z^2 + z^4\}$
$= (x-y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$= (x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2 + 2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$= (x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy) = 0$
$\therefore$ $x = y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because x^2+y^2-z^2+2xy = (x+y)^2 - z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y \neq z$)

41. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리
④ 13자리 ⑤ 14자리

해설

$$10^{20}-4=(10^{10})^2-2^2$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)$$
$$10^{30}-8=(10^{10})^3-2^3$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

42. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4 ② 3 ③ 1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}$ ······㉠
$b-c=2+\sqrt{3}$ ······㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

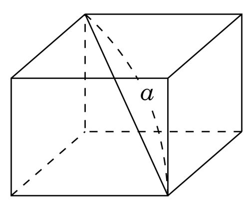
43. $a,\ b,\ c,\ d$가 실수이고 $a^2-b^2=3,\ c^2+d^2=4,\ ab=1,\ cd=2$일 때, $a^2d^2-b^2c^2$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a^2-b^2=3 \cdots$ ㉠
$c^2+d^2=4 \cdots$ ㉡
$ab=1 \cdots$ ㉢
$cd=2 \cdots$ ㉣
㉡, ㉣에서 $(c-d)^2=0$ ($\because 2cd=4$)
$\therefore c=d,\ c^2=d^2=2 \cdots$ ㉤
㉠,㉤에서 $a^2d^2-b^2c^2=2(a^2-b^2)=2\times3=6$

44. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2-a^2$　② $\frac{1}{8}b^2-a^2$　③ $\frac{1}{4}b^2-a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2+a^2$　⑤ $\frac{1}{16}b^2+a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$4(x+y+z)=b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$

$\therefore\ x+y+z=\frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2=a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx)&=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\\&=\left(\frac{1}{4}b\right)^2-a^2\\&=\frac{1}{16}b^2-a^2\end{aligned}$$

45. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ①
$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로
$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.
따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ② 로 놓으면
①에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ③
②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

46. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B = (x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20 ② 16 ③ 10 ④ 5 ⑤ 2

해설

ⅰ) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면
B에서 $x=0$을 대입하면
$3a(a^2-5)=0$, $a=0$($\because a$가 정수)
$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ⅱ) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면
A에서 $x=-3$을 대입하면
$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$
$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식
$a=-2$일 때
즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.
$\therefore$ $a=-2$, $a^2+a=2$

47. x^2 의 계수가 1 인 세 이차식 A, B, C 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A 는?

㉠ A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이다.
㉡ B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이다.
㉢ A, C 의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6 이다.

① x^2+4x+3 ② x^2-x-2 ③ x^2+x-6
④ x^2+5x+6 ⑤ x^2+2x-3

해설

A, B 의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1)$, $B=b(x+1)$
B, C 의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1)$, $C=c(x-2)$
A, C 의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C 의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

48. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠

$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡

$P,\ Q$ 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, $P,\ Q$ 에는

x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -4$

49. 두 다항식 $x^3 - ax^2 - bx + 1$, $x^3 + bx^2 + ax + 1$의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a - b$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

최대공약수를 $(x - \alpha)$라 하자. 인수정리에 의해

$\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ①

$\alpha^3 + b\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \quad \cdots$ ②

②–① $= (b + a)\alpha^2 + (a + b)\alpha$

$\quad = (a + b)\alpha(\alpha + 1) \cdots\cdots$ ③

$a + b = 0$이면 두 다항식이 같아지므로 조건에 맞지 않는다

③에서 $\alpha(\alpha + 1) = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 0$ 또는 -1

i) $\alpha = 0$ 을 ①에 대입 : $1 = 0 \;\Rightarrow$ 성립하지 않는다.

ii) $\alpha = -1$ 을 ①에 대입 : $-1 - a + b + 1 = 0$

$\therefore \; a - b = 0$

50. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB　　② $\frac{AB}{R_1}$　　③ $\frac{AB}{Q_1}$

④ $\frac{AB}{Q_2}$　　⑤ $\frac{AB}{Q_1 Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠

$B = R_1 Q_2 \cdots$ ㉡

유클리드의 호제법에 의하여

A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.

㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로

A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.

따라서, A, B 의 최소공배수는 $\frac{AB}{R_1}$