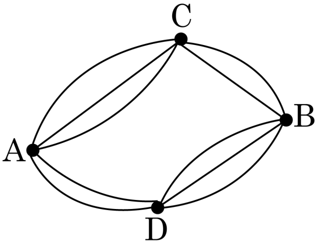
1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A * B = (A \cup B)^c$ 으로 정의할 때, 다음 중 $(B * A) * B$와 항상 같은 것은?

① A ② B ③ $A - B$ ④ $B - A$ ⑤ A^c

해설

$$(B * A) * B = ((BUA)^c \cup B)^c = (B \cup A) \cap B^c$$
$$= (A \cup B) - B = A - B$$

2. 다음 그림과 같이 A 지점에서 B 지점으로 가는 길이 있다. 갑, 을 두 사람이 A 에서 중간지점 C, D 를 각각 통과하여 B 로 가는 가짓수는 몇 가지인가? (단, 한 편이 통과한 중간지점을 다른 편이 통과할 수는 없다.)



① 72 ② 36 ③ 24 ④ 12 ⑤ 6

해설

(ⅰ) 갑이 C 를, 을이 D 를 통과하는 경우의 수 $(3\times2)\times(2\times3) = 36$

(ⅱ) 을이 C 를, 갑이 D 를 통과하는 경우의 수도 같은 방법으로 36가지

따라서, 구하는 경우의 수는 $36 + 36 = 72$ (가지)

3. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 2 개, 10 원짜리 동전 2 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$의 값은? (단, 0 원은 제외)

① 14 ② 26 ③ 40 ④ 46 ⑤ 66

해설

각 동전을 사용하여 지불 할 수 있는 방법의 가짓수는 100 원짜리가 3가지, 50 원짜리가 3가지, 10 원짜리가 3가지이고, 0 원이면 지불하는 것이 아니므로

(지불 방법의 수)$=(2+1)(2+1)(2+1)-1=26$(가지)

지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꿔 생각한다.

즉, 50 원짜리 동전 6 개와 10 원짜리 동전 2 개로 지불할수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.

$\therefore$(지불 금액의 수) $=(6+1)(2+1)-1=20$(가지)

$\therefore a+b=26+20=46$

4. 백인종 2 명, 흑인종 3 명, 황인종 2 명을 일렬로 세울 때, 백인종은 백인종끼리, 흑인종은 흑인종끼리 이웃하여 서는 경우의 수를 구하면?

① 24 ② 144 ③ 210 ④ 288 ⑤ 720

해설

백인종과 흑인종을 각각 한 묶음으로 본다.

$4! \times 2! \times 3! = 288$

5. 15명의 육상부 학생 중에서 학교 대표 계주 선수 4명을 뽑으려고 한다. 교내 달리기 대회에서 우승한 2명의 육상부 학생이 선발되는 경우의 수를 a , 선발되지 않는 경우의 수를 b 라 할 때, $b-a$ 의 값은?

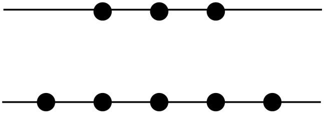
① 628 ② 631 ③ 634 ④ 637 ⑤ 640

해설

$a = {}_{13}C_2 = 78$, $b = {}_{13}C_4 = 715$

$\therefore\ b - a = 715 - 78 = 637$

6. 그림과 같이 두 평행선 위에 8개의 점이 있다. 주어진 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?



① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

윗줄의 점 3 개 중 하나를 선택하고 아래줄 5 개 점 중 하나를 선택하여 직선을 만든다.

$\Rightarrow {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 15$

윗줄, 아래줄 모두 직선이 하나씩 있다.

$\therefore 15 + 1 + 1 = 17$

7. 서로 다른 종류의 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이로 나누어 포장하는 방법의 수는?

① 1800 ② 2000 ③ 2100 ④ 2400 ⑤ 3200

해설

$${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 2100$$

8. 자연수 전체의 두 부분집합 A, B가 각각 $A = \{a \mid a\text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $B = \{b \mid b\text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 일 때, $(B - A) \cup X = X$, $B \cap X = X$를 모두 만족하는 집합 X의 개수는?

① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14 개 ⑤ 16 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $B - A = \{8,\ 16\}$

또 $(B - A) \cup X = X$ 에서

$(B - A) \subset X$, $B \cap X = X$ 에서 $X \subset B$ 이므로 $(B - A) \subset X \subset B$

$\therefore\ \{8,\ 16\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

즉, 집합 X는 8, 16 을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

9. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

10. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　② $P - Q = \varnothing$　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

11. $a > 1$일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

12. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$

④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

13. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때,
$x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{3}$　② 1　③ 99　④ 100　⑤ 101

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 12 - 2 = 10$

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2 = 98$

$\therefore\ x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1 = 98 + 1 + 1 = 100$

14. 함수 $y = \dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=-1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \dfrac{ax+8}{x+b} = \dfrac{8-ab}{x+b} + a$ 이고

점근선의 방정식이 $x = -b = 6$, $y = a = -1$ 이므로 $a = -1$, $b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \le \dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

15. 소파 12개가 일렬로 놓여 있다. 이 소파에 갑, 을, 병, 정 4 명이 앉을 때, 어느 두 사람도 인접하지 않는 경우의 수는?

① 1860 ② 1920 ③ 2800 ④ 3024 ⑤ 3600

해설

12 개의 소파에 4 명이 앉으므로 빈 의자는 8 개이다.

V □ V □ V □ V □ V □ V □ V □ V □ V

따라서, 빈 소파 사이사이와 양 끝의 9 자리에 4 명을 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

$_{9}P_{4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ (가지)