

1. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 6m

② 8m

③ 10m

④ 12m

⑤ 14m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

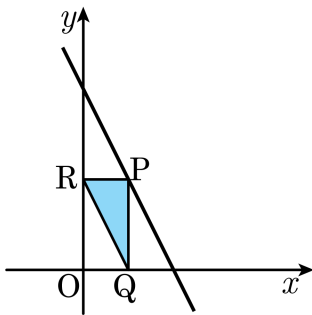
$$y = x(40 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 40x$$

$$= -2(x - 10)^2 + 200$$

$x = 10$ 일 때, 최대값은 200 이다.

2. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle PRQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$

② $\frac{7}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, -2a + 6), Q(a, 0), R(0, -2a + 6)$$

$\triangle PRQ$ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a + 6)$$

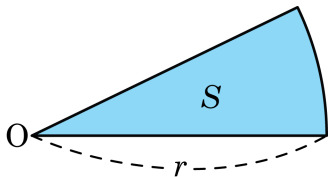
$$= -a^2 + 3a$$

$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$

$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 일 때 최댓값 } \frac{9}{4}$$

3. 둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름의 길이가 r cm 일 때, 넓이를 S cm² 라고 한다. S 가 최대일 때, r 의 값은? (단, 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}lr$ 임을 이용하여라.)



① 3

② 6

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름을 r cm 이라 하면 호의 길이는 $(12 - 2r)$ cm 이다.

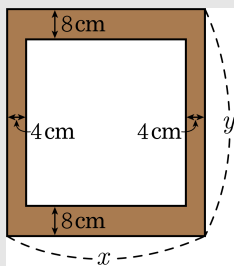
$$\begin{aligned} (\text{부채꼴의 넓이}) &= \frac{1}{2}r(12 - 2r) = -r^2 + 6r \\ &= -(r - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

따라서 $r = 3$ 일 때, 부채꼴의 최대의 넓이는 9 이다.

4. 직사각형 모양의 액자를 만드는데 가장자리의 위아래에는 8 cm, 양 옆에는 4 cm 의 여백을 두고 가운데 부분에 사진을 넣으려 한다. 액자 둘레의 길이가 224 cm 일 때, 사진의 넓이를 최대로 하는 액자의 짧은 변의 길이를 구하면? (단, 단위는 cm)

- ① 48 cm ② 50 cm ③ 52 cm ④ 54 cm ⑤ 60 cm

해설



액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를 각각 x , y 라 하면
주어진 조건에 의하여

$$2(x + y) = 224, \therefore x + y = 112$$

사진의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= (x - 8)(y - 16) = (x - 8)(112 - x - 16) \text{ 즉, 사진의 넓이는} \\ &= (x - 8)(96 - x) \\ &= -x^2 + 104x - 768 \\ &= -(x - 52)^2 + 1936 \end{aligned}$$

$x = 52$, $y = 60$ 일 때

최대가 된다.

따라서 구하는 액자의 짧은 변의 길이는 52 이다.

해설

액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를
각각 x , y 라 하면

사진의 넓이는 $S = (x - 8)(y - 16)$ 이다.

한편, $2(x + y) = 224$ 이므로 $x + y = 112$ 이고

$$(x - 8) + (y - 16) = x + y - 24 = 88$$

$x - 8 > 0$, $y - 16 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균 관계에 의하여

$$\frac{(x - 8) + (y - 16)}{2} \geq \sqrt{(x - 8)(y - 16)}$$

$$\therefore S = (x - 8)(y - 16) \leq 44^2 = 1936$$

따라서 $x - 8 = y - 16 = 44$ 일 때

S 의 값이 최대이다.

$$\therefore x = 52, y = 60$$

5. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}h &= 20t - t^2 + 20 \\&= -(t^2 - 20t) + 20 \\&= -(t - 10)^2 + 120\end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

6. 삼차방정식 $x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12} = 0$ 의 세 근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, $\alpha \leq m \leq \gamma$ 인 정수 m 의 개수를 구하면?

① 23개

② 24개

③ 25개

④ 26개

⑤ 27개

해설

$f(x) = x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3) = f(2^4) = f(2^5) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x - 2^3)(x - 2^4)(x - 2^5)$$

$\alpha < \beta < \gamma$ 에서 $\alpha = 2^3$, $\gamma = 2^5$ 이므로

$$2^3 \leq m \leq 2^5$$

$\therefore$ 정수 m 의 개수는 $2^5 - 2^3 + 1 = 25$

7. 방정식 $x^5 = 1$ 의 허근을 ω 라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \alpha^2 + \alpha = 1$$

8. x 에 대한 방정식 $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 a 의 값을 정할 때, 정수 a 의 개수는?

① 3개

② 4개

③ 5개

④ 6개

⑤ 7개

해설

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$$

여기서, $x = -2$ 는 $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 의 근이 될 수 없다.

$$(\because (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a - 2)^2 + 2 \neq 0)$$

따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,

$x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$$\therefore D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0, 4a^2 - 16a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{17}}{2}$$

따라서, a 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

9. x 에 관한 방정식 $x^{1998} + 10x - 3 = 0$ 의 모든 근(1998개)에 대하여 각각의 근을 1998 제곱한 합을 구하면?

① 0

② -10

③ 5994

④ -5994

⑤ -59940

해설

$x^{1998} + 10x - 3 = 0$ 의 각각의 근을 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1998}$ 이라 하면

$x^{1998} = -10x + 3$ 에서

$$x_1^{1998} = -10x_1 + 3, x_2^{1998}$$

$$= -10x_2 + 3, x_3^{1998}$$

$$= -10x_3 + 3 \cdots x_{1998}^{1998}$$

$$= -10x_{1998} + 3$$

$$\therefore x_1^{1998} + x_2^{1998} + x_3^{1998} + \cdots x_{1998}^{1998}$$

$$= -10(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1998}) + 3 \times 1998$$

$$= 0 + 3 \times 1998 = 5994 (\because x_1 + x_2 + \cdots x_{1998} = 0)$$