1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다 ② $x = 3$

③ $x \neq 3$인 모든실수 ④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$　② $4 \le m \le 8$　③ $0 \le m < 8$

④ $4 < m \le 8$　⑤ $m \ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 이어야 한다.

ⅰ) $m = 0$일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⅱ) $m \neq 0$일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m > 0 \cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$의 판별식을
D라 할 때
$D = (-m)^2 - 8m < 0,\ m(m-8) < 0$
$\therefore 0 < m < 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $0 \le m < 8$

3. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$　　② $-7<x<-5$

③ $-7<x<5$　　④ $5<x<7$

⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ (가)

(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

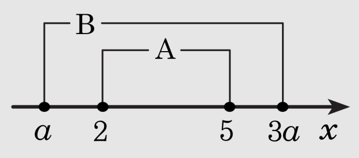
$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

4. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$　② $\frac{2}{3} \le a \le 2$　③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$　⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \ge 0$
$x^2 - 7x + 10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2,\ 3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

5. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \le 0$　　② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$　　④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3-\sqrt{7}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

6. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a > 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a > -\frac{1}{2}$ ③ $a > -\frac{1}{3}$

④ $a > -\frac{1}{4}$ ⑤ $a > -\frac{1}{5}$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a > 0$에서

i) $a = 0$이면 $x > 0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a > 0$ 이면 $y = ax^2 + (a+1)x + a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2+(a+1)x+a > 0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.

iii) $a < 0$이면 $D = (a+1)^2 - 4a^2 > 0$

$3a^2 - 2a - 1 < 0$, $(3a+1)(a-1) < 0$

$\therefore \; -\frac{1}{3} < a < 1$, $a < 0$ 이므로 $-\frac{1}{3} < a < 0$

i), ii), iii) 에서 $a > -\frac{1}{3}$

7. 부등식 $x^2 - 5|x| + 4 \le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(i) $x > 0$
$x^2 - 5x + 4 \le 0$
$(x-1)(x-4) \le 0$
$\Rightarrow \quad 1 \le x \le 4$
(ii) $x < 0$
$x^2 + 5x + 4 \le 0$
$(x+1)(x+4) \le 0$
$\Rightarrow \quad -4 \le x \le -1$
$\therefore$ 정수의 개수 : 8개

8. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\dfrac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

9. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ \dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

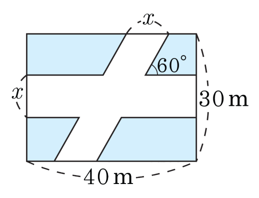
10. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15　　② 17　　③ 19　　④ 20　　⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) < 0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) < 0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$ ①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6) \geq 0$
$a^2-5a-6 \leq 0$
$(a-6)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 6 \cdots$ ②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

11. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 60° 로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m　② 6m　③ 8m　④ 10m　⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

$(x - 10)(x - 60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는

$x \geq 60\ (0 < x < 30)$ 이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는

$0 < x \leq 10$ 이므로 10 m 이다.

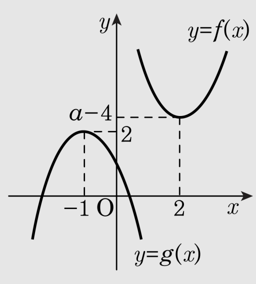
12. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a - 4 > 2$ $\therefore$ $a > 6$



13. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \ge -1$
④ $a < -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

14. 부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되어야하므로

$0 \le x \le 2$ 에서

$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면

$0 \le x \le 2$ 에서

$f(x) \le 0$ 이어야 하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.

$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서

$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

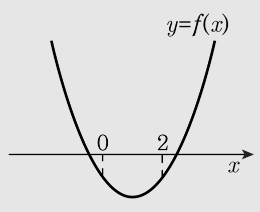
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서

$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$

따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로

$M - m = 2$



15. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $|x-2|<\sqrt{3}$ 의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 의 해를 구하면?

① $0<x<1$ ② $1<x<2$ ③ $2<x<3$
④ $3<x<4$ ⑤ $4<x<5$

해설

$|x-2|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$
$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(\because a<0)$
$-\frac{b}{a}=4, \frac{c}{a}=1 \Rightarrow b=-4a, c=a$
그러면 주어진 식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 에서
$ax^2+(-4a+a)x+a-4a+5a>0$
$ax^2-3ax+2a>0$ $(\because a<0)$
$x^2-3x+2<0$
$(x-2)(x-1)<0$
따라서 $1<x<2$