1. $a>0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ ② $\sqrt[2p]{a^{mp}}=\sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt{a^{mn}}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{a})^n=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}=a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$$

2. 양의 실수 a에 대하여 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[8]{a^n}$ 이 성립할 때, 자연수 n의 값은?

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 16

해설

$$\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^7}{a}}$$

$$= \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}$$

$\therefore n = 4$

3. $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$x^3 + x^{-3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$
$$x - 2 + x^{-1} = 4$$
$$x + x^{-1} = 6$$
$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$
$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

4. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?(단, $a > 0$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서 $a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x})$이므로

$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore \; a^{2x} = 3$

$$\therefore \; \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

5. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[7]{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A, 확대 배율을 a로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$이므로

$A \cdot a^5 = 2A$에서 $a^5 = 2$ $\therefore$ $a = \sqrt[5]{2}$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

6. 모든 실수 x에 대하여 $\log_4\{x^2-(a-1)x+4\}$의 값이 존재하기 위한 a의 값의 범위는?

① $-3<a<5$ ② $-3\le a\le 5$ ③ $-1<a<1$

④ $1<a<3$ ⑤ $3\le a\le 5$

해설

진수의 조건에서 $x^2-(a-1)x+4>0$

방정식 $x^2-(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$

$\therefore -3<a<5$

7. $\dfrac{\log_2 \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt[6]{16}} - \log_2 10\sqrt[3]{10}}{\log_2 \sqrt{0.12}}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설

밑이 모두 같으므로 로그의 합 또는 로그의 차로 정리한다.

$$
\begin{aligned}
(\text{분자}) &= \log_2 3^{\frac{2}{3}} + \left(2 - \log_2 16^{\frac{1}{6}}\right) - \log_2 10^{\frac{4}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\log_2 3 + \left(2 - \frac{1}{6}\log_2 16\right) - \frac{4}{3}\log_2 10 \\
&= \frac{2}{3}\log_2 3 + 2 - \frac{4}{6} - \frac{4}{3}(1 + \log_2 5) \\
&= \frac{2}{3}\log_2 3 - \frac{4}{3}\log_2 5 = \frac{2}{3}(\log_2 3 - 2\log_2 5) \\
&= \frac{2}{3}\log_2 \frac{3}{25} = \frac{2}{3}\log_2 0.12
\end{aligned}
$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{\frac{2}{3}\log_2 0.12}{\frac{1}{2}\log_2 0.12} = \frac{4}{3}$$

8. $\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$의 소수 부분을 x라 할때, 2^{x+1}의 값을 구하면?

① $\sqrt{3}+1$ ② $\sqrt{5}+1$ ③ $\sqrt{6}+1$

④ $\sqrt{7}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해설

$\log_2 \sqrt{7+\sqrt{24}}$

$= \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$= \log_2(\sqrt{6}+1)$

$= \log_2(3.\times\times\times)$

$= 1.\times\times\times$

따라서, $x = \log_2(\sqrt{6}+1) - 1$

$2^{x+1} = 2^{\log_2(\sqrt{6}+1)} = \sqrt{}+1$

9. $\log \dfrac{x}{4.71} = 1.9812$를 만족하는 양수 x의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	$\cdots$
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	$\cdots$
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \dfrac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$이므로 $x = 451$

10. $\log a$의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a\sqrt{a}$의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le A < 3$
② $\frac{3}{2} < A \le 3$
③ $2\sqrt{2} \le A < 3\sqrt{3}$
④ $3 \le A < \frac{9}{2}$
⑤ $3 < A \le \frac{9}{2}$

해설

$\log a$의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \le \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \le A < \frac{9}{2}$

11. 두 양수 A, $\frac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1)+(1-\alpha)$

따라서 $\log \frac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha+\beta = \alpha+(1-\alpha) = 1$

12. $\log a = 0.08$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\log\left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20\log a = -20\times 0.08$$

$$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$$

따라서 지표가 -2이므로 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나온다.

13. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 20]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$1 \le k < 10$ 일 때, $[\log_{10} k]=0$

$10 \le k < 100$ 일 때, $[\log_{10} k]=1$

$\therefore 0 \times 9 + 1 \times 11 = 11$

14. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환 $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1-0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

15. 등차수열 $\log 100,\ \log\dfrac{100}{2},\ \log\dfrac{100}{4},\ \log\dfrac{100}{8},\cdots$ 은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음으로 음수가 되는가?

① 제 11항　　② 제 13항　　③ 제 15항

④ 제 17항　　⑤ 제 19항

해설

주어진 등차수열의 각 항을 정리해서 나열해 보면

$2, 2-\log 2, 2-2\log 2, 2-3\log 2, \cdots$

즉, 이 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 $-\log 2$ 인 등차수열이므로

첫째항부터 제 n항까지의 합이 음수가 되려면

$$\frac{n\left\{2\cdot 2+(n-1)\cdot(-\log 2)\right\}}{2}<0$$

$$n\left\{(-\log 2)n+(4+\log 2)\right\}<0$$

$$n\left\{(\log 2)n-(4+\log 2)\right\}>0$$

$$n>\frac{4+\log 2}{\log 2}=\frac{4.3010}{0.3010}=14.\times\times\times$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제15항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

16. 수소 이온 농도는 용액 1L속에 존재하는 수소 이온의 그램이온수의 역수의 상용로그를 취하여 구하고, 기호 pH로 나타낸다.

즉, $\mathrm{pH} = \log \dfrac{1}{[\mathrm{H}^+]}$ ($[\mathrm{H}^+]$는 수소 이온의 그램이온수) 이다. 두 용액 A, B의 수소 이온 농도가 각각 4, 6이고 수소 이온의 그램이온수가 각각 a, b일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값은?

① $\dfrac{1}{100}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ 1 ④ 10 ⑤ 100

해설

$4 = \log \dfrac{1}{a}$ 에서 $\dfrac{1}{a} = 10^4 \quad \therefore\ a = 10^{-4}$

$6 = \log \dfrac{1}{b}$ 에서 $\dfrac{1}{b} = 10^6 \quad \therefore\ b = 10^{-6}$

$\therefore\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2 = 100$

17. 정부에서는 흡연률과 간접흡연의 피해를 줄이고 청소년 흡연예방 등을 위해 담배 가격을 지속적으로 인상하려고 한다. 만약 정부가 담배 가격을 매년 일정한 시기에 바로 이전 연도 보다 15% 씩 올리기로 한다면, 현재 가격의 세 배 이상이 되는 것은 최소 n 년이 경과해야 하는지를 아래 상용로그표를 이용하여 구하면? (단, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 이다.)

< 상용로그표 >

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

현재 가격을 a 라 하고, n 년후 처음으로 3 배 이상이 된다고 하면 $a(1+0.15)^n \geq 3a$,

$n \log 1.15 \geq \log 3$

$$n \geq \frac{\log 3}{\log 1.15} = \frac{0.4771}{0.0607} = 7.8\times\times\times$$

8 년 후 처음으로 3 배 이상이 된다.

18. $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$= \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}} \times \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

19. $\sqrt[n]{7}=100$일 때, $\dfrac{10^n-10^{-n}}{10^n+10^{-n}}$의 값은? (단, n은 양의 정수이다.)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{6}{7}$

해설

$\sqrt[n]{7}=100$의 양변을 n제곱하면

$7=100^n=10^{2n}$

$\dfrac{10^n-10^{-n}}{10^n+10^{-n}}$의 분자와 분모에 10^n을 곱하면

$$\frac{(10^n-10^{-n})10^n}{(10^n+10^{-n})10^n}=\frac{10^{2n}-1}{10^{2n}+1}=\frac{7-1}{7+1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

20. 어떤 자연수 A에 대하여 $\log A = 5.7016$일 때, 소수 $\frac{1}{A}$은 소수점 아래 $\square$번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나오며, 그 숫자는 $\square$이다. 이때, $\square$ 안에 알맞은 수를 차례로 적은 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5, 1 ② 5, 2 ③ 6, 1 ④ 6, 2 ⑤ 6, 3

해설

$$\log\frac{1}{A} = -\log A = -5.7016 = -6 + 0.2984$$
$$= \bar{6}.2984$$

$$\log\frac{1}{A} + 6 = 0.2984$$

$$\log\frac{1}{A} + \log 10^6 = 0.2984$$

$$\log\frac{10^6}{A} = 0.2984$$

또, $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3010$이므로

$$\log 1 < \log\frac{10^6}{A} < \log 2 \quad \therefore 1 < \frac{10^6}{A} < 2$$

$$\therefore 1 \times 10^{-6} < \frac{1}{A} < 2 \times 10^{-6}$$

$$\therefore \frac{1}{A} = 0.000001\times\times\times$$

따라서, $\frac{1}{A}$은 소수점 아래 6번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나오며, 그 숫자는 1이다.