

1. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ 1, 4, 9, 16, 25, ...

㉡ 3, 9, 27, 81, 243, ...

㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999, ...

㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27

㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

2. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$ 일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{6} \text{에서, } a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$$

$$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8} \text{에서 } (a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{즉, } a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = x - 3$, $a_2 = x$, $a_3 = x + 6$ 이 성립할 때, a_5 의 값은?

① 16

② 24

③ 32

④ 48

⑤ 52

해설

x 는 $x - 3$ 과 $x + 6$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18$$

$$3x = 18 \quad \therefore x = 6$$

즉, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

4. 두 수 3과 -96 사이에 네 실수 a, b, c, d 를 넣어서 이 순서로 등비수열을 이루도록 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 18

② 24

③ 30

④ 36

⑤ 42

해설

공비를 r 이라고 하면 $-96 = 3 \cdot r^5$ 에서

$$r^5 = -32 \quad \therefore r = -2$$

따라서 네 수 a, b, c, d 의 값은 각각 $-6, 12, -24, 48$ 이므로

$$a + b + c + d = (-6) + 12 + (-24) + 48 = 30$$

5. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

① 2^7

② 2^8

③ 2^9

④ 2^{10}

⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 28 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 252 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡을 변형하면

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 252,$$

$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \cdot (r^3 + 1) = 252$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$28(r^3 + 1) = 252, \quad r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

r 는 실수이므로 $r = 2 \dots\dots \textcircled{㉢}$

$$\textcircled{㉡} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 7a = 28 \quad \therefore a = 4$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$$

6. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{ 인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$2^5 = 32$, $2^6 = 64$ 이므로

$$n = 6$$

7. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1480만원

해설

$$\begin{aligned} & 1\text{년후 원리합계는 } 1000\text{만} \times (1.04)^1 \\ & (10\text{년후 원리합계}) \\ & = 1000\text{만} \times 1.04^{10} \\ & = 1000\text{만} \times 1.48 \\ & = 1480\text{만(원)} \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 100$, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2 = 200$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

① 35

② 40

③ 45

④ 50

⑤ 55

해설

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1) = 100 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 4a_k + 4) = 200 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠}$ 을 하면 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 100$

$$2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 30 = 100, \quad 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 70$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 35$$

9. 수열 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

10. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61

② 63

③ 65

④ 67

⑤ 69

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

11. 다음 중 옳은 것은?

① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^n (3k - 5)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^n 2(k + 1)$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$

④ $4 + 5 + 6 + \cdots + (n + 3) = \sum_{k=1}^n (k + 3)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k$

해설

① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} 2n$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n-2} (k + 2)$

12. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2 + k) - \sum_{k=4}^{10}(k^2 + k)$$

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

$$(\text{준 식}) = \sum_{k=1}^3(k^2 + k) = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) = 20$$

13. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

14. 다음 수열의 합을 \sum 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$$

15. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$

② $\log 50$

③ $\log 55$

④ $\log 60$

⑤ $\log 66$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$$

$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$$

$$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$$

$$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$$

16. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512인 등비수열의 합은?

① 511

② 512

③ 1023

④ 1024

⑤ 2047

해설

$$512 = 1 \cdot 2^{n-1} \text{ 에서 } n = 10$$

$$\therefore a = 1, r = 2, n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

17. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

18. 세 수 a , $a + 2$, $2a + 1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

세 수 a , $a + 2$, $2a + 1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a + 2)^2 = a(2a + 1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a + 1)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

19. 다음 등비수열에서 ()안에 알맞은 수는?

$$32, -8, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, ()$$

① $-\frac{1}{16}$

② $-\frac{1}{18}$

③ $-\frac{1}{24}$

④ $-\frac{1}{32}$

⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}$$

20. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 3^n - 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열이다. 이때, $a + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$S_n = 3^n - 1$$

$$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 2$$

$$\therefore a = 2, r = 3$$

$$\therefore a + r = 2 + 3 = 5$$