1. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x 축의 길이가 3 일 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3 이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 12 이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$

② $k < -2$ 또는 $k > 2$

③ $k < -1$ 또는 $k > 1$

④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$

⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$

$D = K^2 - 16 > 0$이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$

$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

3. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

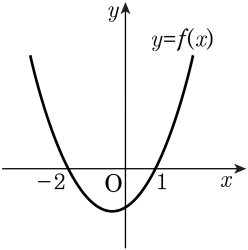
④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore\ a < -2$ 또는 $a > 2$

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

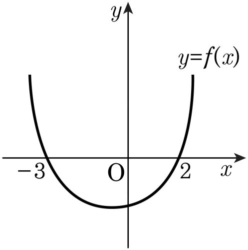
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은
(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{3}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개
이다.

6. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,
즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = 1 - 4k + 8 = 0$
$\therefore k = \frac{9}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$
$\therefore -4x + 4y = 9$

7. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 x 축에 접할 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$y - (-3) = -x^2 - 4x + k$
$y = -x^2 - 4x + k - 3$
$\therefore\ y = -(x+2)^2 + k + 1$
이 그래프가 x 축에 접하려면
꼭지점의 y 좌표가 0 이어야 하므로 $k + 1 = 0$
$\therefore\ k = -1$

8. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k < -2,\ k > 2$ ② $k < -4,\ k > 4$ ③ $k < -1,\ k > 1$

④ $k < 0,\ k > 4$ ⑤ $k < 0,\ k > 2$

해설

판별식 D 가 $D > 0$ 이어야 하므로

$D = k^2 - 4 \cdot 4 > 0$

$(k - 4)(k + 4) > 0$

$\therefore\ k < -4,\ k > 4$

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + k^2 + 2k$의 그래프와 직선 $y = 2kx + b$가 k의 값에 관계없이 서로 접할 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 - ax + k^2 + 2k = 2kx + b$ 에서

$x^2 - (a + 2k)x + k^2 + 2k - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = (a + 2k)^2 - 4(k^2 + 2k - b) = 0$

$a^2 + 4ak - 8k + 4b = 0$

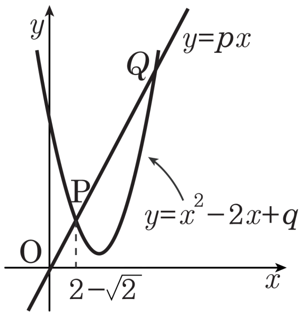
이 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로

$4k(a - 2) + a^2 + 4b = 0$에서

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b = 0$

따라서 $a = 2,\ b = -1$이므로 $ab = -2$

10. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수$y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?



① 1 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.

$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로

한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$

$\therefore\ p = 2$

$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$

$\therefore\ q = 2$

$\therefore\ pq = 4$

11. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

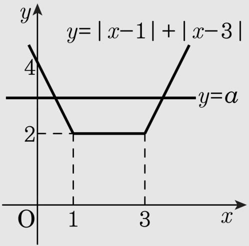
12. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



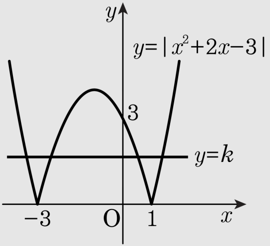
13. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$ ② $k > 4$ ③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$ ⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0<k<3$



14. 이차함수 $y=-x^2+ax$ 의 최댓값이 4 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=4$

해설

$y=-x^2+ax=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$

$x=\frac{a}{2}$ 일 때, 최댓값이 $\frac{a^2}{4}$ 이므로

$\frac{a^2}{4}=4,\ a=\pm 4$

$a>0$ 이므로 $a=4$ 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

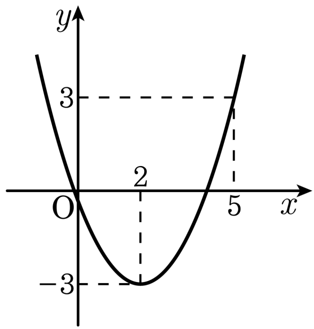
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$ 이다.
$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
$a = 4,\ b = 8$
$\therefore a + b = 12$

16. 다음 그림은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프이다. apq 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

꼭짓점 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y=a(x-2)^2-3$
$y=a(x-2)^2-3$ 의 그래프가 점 $(5,\ 3)$을 지나므로

$3=9a-3 \qquad \therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

$y=\dfrac{2}{3}(x-2)^2-3$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3},\ p=2,\ q=-3$

$\therefore\ apq=\dfrac{2}{3}\times 2\times(-3)=-4$

17. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다.
$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값
-1 을 갖는다.

18. $-2 \le x \le 0$ 에서 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + a + 1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$y = -2x^2 + 4x + a + 1 = -2(x-1)^2 + a + 3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
x 의 값의 범위 $-2 \le x \le 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고
$x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다.
최댓값이 1 이므로 $a + 1 = 1$　$\therefore a = 0$

19. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$y = -x^2 - 2ax + 6a = -(x + a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

20. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M이라고 할 때, M의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x-a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 M의 최솟값은 -9 이다.

21. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면

$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$

그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

22. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2-y^2+z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}=t$ 라 하면

$x=2t-1$, $y=5t+3$, $z=3t-2$ 이므로

$x^2-y^2+z^2=(2t-1)^2-(5t+3)^2+(3t-2)^2=-12t^2-46t-4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2-46\cdot\frac{2}{3}-4=-40$

23. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면
$y=t^2-2t+1=(t-1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t=2$ 일 때 1 이다.

24. 차가 16 인 두 수가 있다. 두 수의 곱의 최솟값을 구하면?

① 4 ② 32 ③ 43 ④ −26 ⑤ −64

해설

차가 16 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(x+16)$ 이다.

$y = x(x+16) = x^2 + 16x = (x^2 + 16x + 64) - 64$

$y = (x+8)^2 - 64$

25. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100 ② 121 ③ 144 ④ 169 ⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28-x$ 이다.
두 자연수의 곱은 $x(28-x)$ 이다.
$x(28-x)=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$

26. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(16-x) \\
&= -x^2 + 16x \\
&= -(x^2 - 16x + 64 - 64) \\
&= -(x-8)^2 + 64
\end{aligned}
$$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

27. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M-m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$일 때, $m=6$

$x=3$일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

28. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$ 일 때,

최댓값 9를 갖는다.

29. x, y가 실수일 때, $x^2-6x+2y^2+4y+7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2-6x+2y^2+4y+7$
$=(x-3)^2+2(y+1)^2-4$이므로
$x=3,\ y=-1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

30. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

31. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

32. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

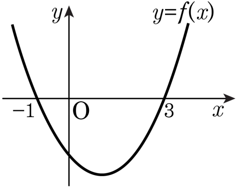
$$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\ge 0$$

$$(y+3)(y-2)\le 0$$

$$\therefore -3\le y\le 2$$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

33. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$의 두 근의 합은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

$y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a > 0)$으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$이므로

$f(2x-1) = 0$에서

$4ax(x-2) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 합은 2이다.

34. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4-2\sqrt{2} \le m \le 4+2\sqrt{2}$

② $4-2\sqrt{3} < m < 4+2\sqrt{3}$

③ $2-2\sqrt{3} < m < 2+2\sqrt{3}$

④ $m \le 4-2\sqrt{2}$ 또는 $m \ge 4+2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4-2\sqrt{3}$또는 $m > 4+2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m,\ y = x$의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$x^2 + (m-1)x + m = x,$

$x^2 + (m-2)x + m = 0$에서

$D = (m-2)^2 - 4m < 0$

$m^2 - 8m + 4 < 0$

$\therefore 4-2\sqrt{3} < m < 4+2\sqrt{3}$

35. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

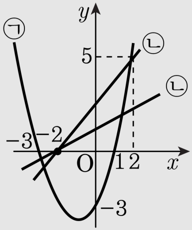
$$\begin{cases} y = x^2 = 2x-3 \cdots\cdots ㉠ \\ y = m(x+2) \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1과 2사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 ㉡이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$



(ii) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

36. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

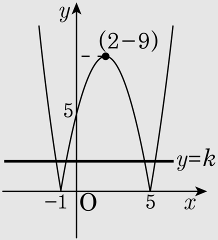
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

37. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　② $-\frac{3}{8}$　③ $\frac{3}{8}$　④ 3　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x-2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$

$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$i)$ $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$ii)$ $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

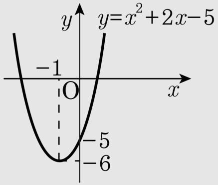
따라서 $a = 3$ 이다.

38. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

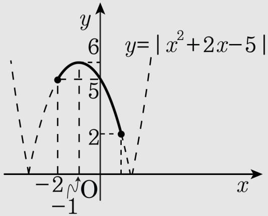
① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

39. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m은 $a = 2$일 때 최댓값 0을 가진다.

40. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2 \geq 0$,

$3x^2+4x-4 \leq 0$, $(x+2)(3x-2) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.